This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

HDI
HW 27G3 8

W81
5158.03

KE730
HARVARD COLLEGE LIBRARY

BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787–1855)
OF BOSTON

FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION

MÉMORIAL

DE

L'OFFICIER DU GÉNIE.

N°. 12.

MÉMORIAL

DE

L'OFFICIER DU GÉNIE,

OU

Recueil de Mémoires, Expériences, Observations et Procédés généraux propres à perfectionner la fortification et les constructions militaires.

RÉDIGÉ PAR LES SOINS DU COMITÉ DU GÉNIE.

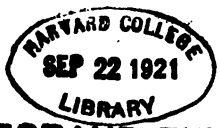
AVEC L'APPROBATION DU MINISTRE DE LA GUERRE.

N°. 12.

PARIS,
IMPRIMERIE ET FONDERIE DE FAIN,
RUE RACINE, N°. 4.

1835.

KE730
~~War5158.03~~



DEGRAND FUND

TABLE

DES MATIÈRES CONTENUES DANS LE XII^e. NUMÉRO DU MÉMORIAL.

Pages.

Prix d'encouragement; extraits des registres du comité du génie. 1

Mémoire sur le calcul des voutes en berceau; par M. de Garidel, *capitaine du génie, aide-de-camp de M. le général* Prévost de Vernois. 7

Mémoire sur le calcul des voutes circulaires; par M. Petit, *capitaine du génie, aide-de-camp de M. le lieutenant-général* Rohault de Fleury. . . 73

Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voutes; par M. Poncelet, *chef de bataillon du génie.* 151

De l'emploi des troupes aux travaux des fortifications; par M. Villeneuve, *capitaine du génie, aide-de-camp de M. le lieutenant-général* Rogniat. 214

Mémoire sur l'emploi du sable dans les fondations en mauvais terrain; par M. Niel, *capitaine du génie.* 260

Pages.

Notice sur une machine a élever les fardeaux par le poids des hommes ; par M. Coignet, *capitaine du génie.* 285

Notice sur la construction du sas Saint-Paul, exécuté a Besançon, en 1829 *et* 1830 ; *par M. A. J. B. A.* Simon, *capitaine du génie.* 309

Note sur l'assainissement des latrines de casernes. 326

ERRATA

DU 12e. NUMÉRO DU MÉMORIAL DE L'OFFICIER DU GÉNIE.

Page. Ligne.

8, 17, *au lieu de* $\sin.s$, *mettez* $\frac{s}{\sin.s}$.

12, 5, en remontant, *au lieu de* $\frac{s}{2\,\text{tang.}\frac{1}{2}s}$, *lisez* $\frac{s}{\text{tang.}\frac{1}{2}s}$.

16, 3, en remontant dans la note, *après ces mots* : et d'être, *ajoutez* au 2e. ordre.

24, 9, le renvoi (2) de cette 3e. formule, correspond à la note placée au bas de la page suivante

25, la note de cette page appartient à la page précédente.

59, 4, *au lieu de* R′, *mettez* K′.

ibid., 2, en remontant (note), *au lieu de* R, *mettez* K.

74, 16, en marge, *ajoutez* Pl. II.

109, 4, *mettez le* Π *sous le radical.*

ibid., 5, *au lieu de* renferme, *mettez* renferment.

132, 1, en remontant, à la marge; *au lieu* de *Fig.* 8, mettez *Fig.* 6.

163, 9, en remontant, *au lieu de* $\frac{1}{2}$, *mettez* $\frac{1}{6}$.

164, 6, *ajoutez* : ou $\alpha_1\mu_1$, $\alpha_2\mu_2$....

166, 6, dans la formule, *au lieu de* $S_5\sigma_5$, mettez $S_5\varphi_5$.

171, 9, au dénominateur de la seconde équation, *au lieu de* cos.(*eip*), *mettez* cos.(*dip*).

190, 6, dernier terme, *au lieu* de $a\varphi + Cj$, mettez $a\varphi \times Cj$.

193, 1, *au lieu* de jCi, mettez jCi_r.

ibid., 2, *au lieu* de $i^r d^r$, mettez $i_r d_r$.

ibid., 7, en remontant, *au lieu de* S, *mettez* S_r.

204, 8, au dénominateur de la 2e. formule, *au lieu de* cos.$(s \pm \alpha)$, *mettez* sin.$(s \pm \alpha)$.

ibid., 11, en remontant, *au lieu* de e^2, dans la formule, mettez e_2.

205, 1, *au lieu de* perpendiculaire, *mettez* parallèle.

Page. Ligne.

ibid., 5, *au lieu de* cos.$(\alpha + s)$ aux deux dénominateurs, *mettez* sin.$(s+\alpha)$ (*).

207, 12, en remontant, *au lieu de* σ_1, σ_2, σ_3,... *lisez* $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$....

ibid., 19, *au lieu de* égale, *lisez* égales.

209, 16, *au lieu de* L'intersection, *lisez* L, intersection.

211, 18, ajoutez *Fig.* 4.

213, 7, *au lieu de* perpendiculaires, *lisez* parallèles, et faites à la *Fig.* 12 la rectification indiquée dans la note ci-dessous.

254, 10, *au lieu de* d'empêcher, *lisez* empêcher.

282, 6, *au lieu de* dernier, *lisez* premier.

288, 11, *au lieu de* plateaux, *lisez* poteaux.

293, 3, en marge, *au lieu de* machine, *lisez* de la machine.

(*) D'après ces corrections, on devra remplacer dans la *Fig.* 12, Pl. III, les droites $j'\lambda_1$, $j'\lambda_2$,.... par des parallèles, aux lignes de joints respectives (*Fig.* 1), tracées dans l'angle $\delta' {}_1 j' \delta' {}_1$, et les droites $\delta' {}_1\lambda_1$, $\delta' {}_2\lambda_2$,.... par leurs prolongemens dans ce même angle. Mais, comme il en résulterait de la confusion sur le dessin, on fera bien de mener les parallèles dont il s'agit, par les points $\delta' {}_1$, $\delta' {}_2$,.... de mêmes indices, en prenant, pour les valeurs cherchées de la cohésion, les distances comprises entre leurs points de départ et leurs intersections respectives avec les perpendiculaires menées, par j', aux axes jN, jN' (*Fig.* 1 et 4), qui forment, avec l'horizon, un angle égal à celui du frottement.

Supplément à l'errata du 12ᵉ n° du Mémorial de l'officier du génie. — *Mémoire de M. de Garidel.*

Page 8, ligne 15, au lieu de M. *Perry*, lisez MM. *Lamé* et *Clapeyron ont indiqué*, etc.

Idem, ligne 17, *au lieu de* $\sin z$, *lisez* $\frac{z}{\sin z}$

Page 9, ligne 12, supprimez ces mots : *nous les indiquerons dans une note*

Page 11, ligne 21, après *commode* mettez un point, et après *anse de panier*, mettez une virgule au lieu de point et virgule

Idem, ligne 29, au lieu de *notion*, lisez *notation*

Page 12, ligne 16, *au lieu de* $\frac{z}{2\tan g\frac{z}{2}}$, *lisez* $\frac{z}{\tan g\frac{z}{2}}$

Page 16, ligne 7, *au lieu de* 63°, *lisez* 64°

Page 18, ligne 4, au lieu de *entre* 0 *et* 1, lisez *entre* 1 *et* 2

Page 20, ligne 10, au lieu de $z = 62°$, lisez $z = 64°$

Idem, ligne 11, au lieu de $z = 65°$, lisez $z = 66°$

Page 23, ligne 13, au lieu de la valeur de F′ qui est écrite, *lisez*

$$F'=\frac{\frac{n^2\sin^2 z}{6(\cos z+m\sin z)^2}[3R(\cos z+m\sin z)-n]-\frac{R^3}{6}[3z\sin z-2(1-\cos z)]}{a+R(1-\cos z)}$$

Page 27, ligne 5, à la suite du mot *centimètres*, *ajoutez* à partir du centre de la voûte

Page 29, ligne 2, *au lieu de* O′A′, *lisez* OA′

Idem, ligne 14, *au lieu de* V, *lisez* V′, les deux fois

Page 30, ligne 6, en remontant, remplacez dans la formule le 2ᵐᵉ facteur $\frac{n(n-3c\gamma)\cos i}{3Rn(n+2c\gamma)\cos(z-i)}$ par $\frac{n(n-3c_\gamma)\cos i}{3R(n+2c_\gamma)\cos(z-i)}$

Page 32, ligne 9, au lieu de $z+x$, lisez $\cos(z+x)$

Page 34, ligne 8, au lieu de j', j'_1, j'_2, lisez j, j_1, j_2

Idem, ligne 10, *au lieu de* $\frac{(R+a)(R-a)}{2R^3}\times 100$, *lisez*

$$\frac{n(R+a)(R-a)}{2R^3}\times 100$$

Page 37, ligne 9, après ces mots *remarqué par M. Audoy*, *ajoutez* et auparavant par M. Navier (*Science des Ingénieurs*)

Page 37, ligne 21, *au lieu de ces mots :* par le milieu, *lisez* au $\frac{1}{3}$ du piédroit cherché à partir de son parement intérieur.

Page 38, ligne 9, la valeur de $S\delta$ est erronée, et l'on doit écrire

$$S\delta = R^2\left[\frac{n}{2} - \frac{R\tan g\, i}{6} - \frac{R(3\varpi - 4)}{12}\right]$$

Page 38, ligne 11, au lieu de *fût erronée,* lisez *trop erronée*

Idem, ligne 13, *à la suite de ces mots :* l'épaisseur trouvée, *lisez :* mais cela n'arrivera pas, et l'approximation sera généralement suffisante. Au reste, en partant de ce premier résultat, on mesurera une nouvelle valeur de H que j'appelle H′, et la correction de l'épaisseur sera $+\frac{(H-H')e}{2\left(H'+\frac{s}{e}\right)}$, formule facile à légitimer, en négligeant le carré de cette correction

Page 40, ligne 7 en remontant, au lieu de $\frac{n-R-a}{2R}$, lisez $\frac{n-\frac{R+a}{\cos i}}{2R}$

Page 41, ligne 1, *au lieu de* côté, *lisez* case

Page 45, ligne 3, en remontant, *au lieu de* $\sin\alpha$, *lisez* $\sin\theta_0$

Idem, ligne 2, en remontant, au lieu de $\chi(\theta_1)$, lisez $\chi(\theta_0)$

Page 46, ligne 13, *au lieu de* $D + \chi(z)$, *lisez* $D - \chi(z)$

Page 48, note au bas de la page. Ces dénominations sur l'aplatissement et le surbaissement appartiennent à l'auteur et ne sont pas celles usitées. On ne fait guère » plus petit que $\frac{1}{6}$

Page 51, ligne 1, en remontant, la valeur de F′ est erronée, remplacez-la par celle-ci :

$$F' = \frac{2R_0^3}{a} \times \frac{\varphi(z) + \frac{1}{6\cos i}\left(1+\frac{a}{R_0}\right)^2\left(1-2\frac{a}{R_0}\right)\chi(z)\left\{1+\frac{3\cos i\left(1+\frac{a}{R_0}\right)\left(1+\frac{a+c}{R_0}\right)}{\left(1+\frac{a}{R_0}\right)\left(1-\frac{2a}{R_0}\right)} - \chi(z-i)\right\}}{\frac{2R_0}{a} + \pi(z)}$$

Page 59, ligne 4, *au lieu de* R′, *lisez* K′

Idem, ligne 14, *au lieu de* $2uv$, *lisez* dans la formule, $4uv$

Idem, ligne 2, en remontant, *au lieu de* R, *lisez* K

Idem, ligne 11, en remontant, *au lieu de* $B_1L_1L_2A_2$, *lisez* $B_1S_1L_2A_2$

Page 60, ligne 6, en remontant, *au lieu de* $\tan g(\theta_1 - 37^\circ)$, *lisez* $\tan g(\theta_2 - 37^\circ)$

Page 66, ligne 4, en remontant, *au lieu de* M^t. *Amurs*, *lisez* M^t. *Amrs*

Idem, ligne 3, en remontant, *au lieu de* A^2B, dans la formule, *lisez* AB^2

Page 66, ligne 1, en remontant, cette valeur de F′ est inexacte, mais les équations qui suivent sont vraies

Page 67, ligne 1, *ajoutez :* α étant l'angle du joint lui-même avec la verticale, cet angle est lié avec l'angle s, par la relation $\operatorname{tang}\alpha = \frac{A}{B}\operatorname{tang} s$

Page 69, ligne 11, en remontant, *au lieu de* $\frac{2B^2A}{a} + \text{etc.}$, *lisez* $\frac{2B^2A}{a} \times \text{etc.}$

Page 71, dans la colonne des valeurs de $\log\psi(s)$, *au lieu de* 0,601852, *lisez* 0,601582

Page 72, dans la colonne des $\log\chi(s)$, à la place de 0,128082, *lisez* 0,127759

Idem, dans la colonne des $\varphi(s)$, *au lieu de* 1,400250, *lisez* $\bar{1}$,400250

Pl. I^re^, fig. 1^re^, ligne 3, *au lieu de* OA, *lisez* OA′

Tracez la ligne HX au $\frac{1}{3}$ de l'épaisseur du piédroit, à partir de son parement intérieur.

MÉMORIAL

DE

L'OFFICIER DU GÉNIE.

PRIX D'ENCOURAGEMENT.

EXTRAIT DES REGISTRES DU COMITÉ DU GÉNIE.

Séance du 18 décembre 1832.

Le comité entend le rapport présenté par une commission choisie dans son sein, et chargée, par lui, de l'examen des mémoires adressés pour concourir aux prix d'encouragement, qui, en vertu de la décision ministérielle du 24 août 1822, sont offerts chaque année aux officiers du génie.

Les mémoires sont au nombre de cinq.

Le N°. 1 est intitulé : *Marché relatif au service du génie.* Il porte pour épigraphe une citation de Belidor, ainsi conçue : « (Devis.) Les qualités principales sont » que toutes les matières soient mises dans un bel » ordre, énoncées, etc. »

Le N°. 2 est une *Notice sur une machine à élever les fardeaux, mue par le poids des hommes.* Il porte pour épigraphe : « Il n'est point de petites économies » de tous les jours. »

Le N°. 3 est un *Mémoire sur les formules en usage dans les mines, transformées en fonction du côté du coffre aux poudres.*

Le N°. 4 est un *Mémoire sur la construction des voûtes plates.* Il porte pour épigraphe : « *Cave ne* » *cadant.* »

Le N°. 5 est un *Mémoire sur les demi-lunes :* « La demi-lune est une véritable ligne de contre-» approche, etc., etc. »

Le rapport fait ressortir le mérite de ces diverses productions, indique les avantages que l'art de l'ingénieur peut en retirer, et signale les parties défectueuses de chacun de ces mémoires.

Le comité, après avoir mûrement examiné les éloges et les critiques énoncés dans le rapport, en les comparant aux passages auxquels ils se rapportent, fait les remarques suivantes.

1°. Le mémoire N°. 5, sur les demi-lunes, accompagné de dessins fort bien faits, est d'ailleurs fort bien écrit, et prouve que son auteur a long-temps médité sur les propriétés de la fortification, et est doué d'une imagination vive qui lui suggère d'heureux expédiens pour remédier aux défauts que présentent, à divers degrés, les systèmes inventés jusqu'à ce jour.

Le comité, sans adopter toutes les idées exprimées dans le mémoire, et toutes les dispositions indiquées sur les dessins, considérant combien il est devenu difficile de faire à la fortification en usage, des changemens nouveaux qui puissent passer pour des perfectionnemens incontestables, et combien cependant il importe de stimuler le zèle des officiers

pour employer leurs loisirs à des études de ce genre, qui, alors même qu'elles ne les conduiraient pas à des inventions susceptibles d'être unanimement adoptées, ne peuvent cependant que perfectionner leurs connaissances dans l'art qui fait la base des fonctions de l'ingénieur militaire, pense que le mémoire N°. 5 est digne de fixer l'attention, et par la nature du sujet traité, et par le soin et le talent qui distinguent ce travail.

2°. Le mémoire N°. 2, qu'accompagne un dessin de la machine qu'il décrit, expose un procédé ingénieux pour élever, avec de moindres frais que ceux que l'on fait en adoptant les moyens usités, des poids verticaux. Ce dispositif, applicable particulièrement aux remblais, a été exécuté par l'auteur, qui ne donne que des résultats, fruits d'une expérience pratique, et prouve que déjà, à deux relais de hauteur verticale, si l'on compare les prix résultant de l'emploi de sa machine avec ceux que l'on paye en employant les rampes et ponts de service, la dépense sera réduite au tiers, et que la proportion deviendrait de plus en plus avantageuse à mesure que la hauteur augmenterait.

Le comité pense que, quoique ce travail ne soit que la généralisation d'une disposition déjà appliquée dans diverses circonstances, les recherches et les calculs rapportés, les résultats vraiment remarquables et à peu près inattendus sous le rapport de l'économie, qui y sont relatés, en font une notice éminemment utile et dont la publicité sera très-avantageuse aux intérêts de l'état.

Les trois autres mémoires méritent, à divers titres,

à la poussée, il sera toujours nécessaire, ou de la trouver toute calculée dans les tables, ou de la déduire très-facilement d'un nombre qui y serait inscrit : par exemple, de l'épaisseur du piédroit correspondant à une hauteur infinie. Car la poussée se combine souvent avec d'autres forces semblables agissant dans le même sens ou en sens contraire, ou avec des poids qui s'ajoutent aux piédroits, etc., sans exercer d'influence sur la position du joint de rupture. On ne peut donc se dispenser de calculer cette force dans chaque cas, et l'on a assez fait pour l'ingénieur quand on lui en indique l'intensité et la position.

Il est inutile de revenir sur la théorie des voûtes, pour laquelle je renvoie aux mémoires de Coulomb et aux ouvrages de MM. Audoy, Navier et Persy. On sait, depuis Coulomb, que la *poussée*, ou cette force horizontale qui naît, à la clef, par l'appui des deux demi-voûtes l'une contre l'autre, est donnée par *le maximum du quotient qu'on obtient en divisant le moment du poids d'un voussoir* (1), *relatif à son arête d'intrados inférieure, par le bras de levier de ce poids ou la distance verticale, de cette arête, à l'horizontale du sommet de la voûte*,

On ne saurait trop rappeler que M. le colonel Audoy a démontré (*Mémorial de l'officier du génie*, N°. 4), que cette manière de calculer la poussée revenait identiquement à la méthode suivie par d'autres ingénieurs, et qui consiste à considérer une voûte

(1) Par *voussoir*, on entend ordinairement, dans la théorie des voûtes, la portion comprise entre un joint quelconque et celui de la clef, portion qui est supposée continue et d'une seule pièce.

comme composée de quatre leviers réunis bout à bout, et tendant à tourner autour de leurs extrémités; hypothèse qui est indiquée par l'expérience même.

M. Audoy, appliquant la règle ci-dessus aux différentes espèces de voûtes en berceau, a donné les expressions algébriques des quantités dont il faut chercher le maximum. Ces expressions sont pour la plupart fort compliquées. La seule simplification qu'on y ait apportée jusqu'à présent, consiste dans la différentiation de quelques-unes d'entre elles (Voy. les *Leçons* de M. Persy, à l'école de Metz); mais, en général, il ne semble pas qu'il soit beaucoup plus facile d'approcher de 0, par des tâtonnemens, que d'un maximum ou d'un minimum, surtout quand les fonctions sont transcendantes : nous étudierons, au reste, ce moyen de simplification dans les cas où il est possible.

Notations et conventions.

En conséquence, nous prendrons chacune des formules de M. Audoy, dans l'état où il l'a laissée, et nous essaierons de la ramener à une forme plus commode pour quelques voûtes, comme celles *en anse de panier;* nous reviendrons sur la méthode elle-même, afin d'obtenir des formules plus simples que celles de cet auteur. Sa notation sera fidèlement conservée : ainsi la poussée sera désignée par F, maximum de F'; et, quand nous voudrons désigner une valeur particulière de F', par exemple celle qui correspond à une valeur de z égale à θ, nous emploierons la notion $F'(\theta)$; mais ce ne sera que dans quelques cas fort rares.

J'ajouterai que la plupart des valeurs de F', renferment un facteur constant et un facteur variable.

ouvrage de création et de découverte, est digne cependant de fixer l'attention, et par la nature du sujet traité, et par le soin et le talent apportés à ce travail.

2°. Les trois autres mémoires méritent, à divers degrés, une honorable mention, et prouvent que leurs auteurs ont été animés du louable désir de consacrer à d'utiles recherches, le peu de loisirs que leurs fonctions d'ingénieurs leur ont laissé.

D'après cet exposé, le comité est d'avis :

Qu'il soit accordé un second prix à l'auteur du mémoire N°. 4, sur le calcul des voûtes en berceau, et que ce travail soit inséré en entier, dans le prochain numéro du *Mémorial de l'officier du génie*.

Le président ayant ouvert immédiatement le bulletin cacheté annexé au susdit mémoire, annonce au comité que l'auteur du mémoire n°. 4 est le capitaine du génie Petit.

Pour extrait conforme,

Le Lieutenant-général du génie,
Président du Comité,

Signé ROGNIAT.

Le Colonel du génie,
secrétaire du comité,

Signé LAMY.

Approuvé par le Ministre,
les 30 décembre 1832 et 22 décembre 1833.

SUPPLÉMENT A L'ERRATA DU 12^e N^o DU MÉMORIAL DE L'OFFICIER DU GÉNIE. — *Mémoire de M. de Garidel.*

Page 8, ligne 15, au lieu de M. *Perry*, lisez MM. *Lamé* et *Clapeyron ont indiqué*, etc.

Idem, ligne 17, *au lieu de* $\sin z$, *lisez* $\frac{z}{\sin z}$

Page 9, ligne 12, supprimez ces mots : *nous les indiquerons dans une note*

Page 11, ligne 21, après *commode* mettez un point, et après *anse de panier*, mettez une virgule au lieu de point et virgule

Idem, ligne 29, au lieu de *notion*, lisez *notation*

Page 12, ligne 16, *au lieu de* $\frac{z}{2\tan\frac{z}{2}}$, *lisez* $\frac{z}{\tan\frac{z}{2}}$

Page 16, ligne 7, *au lieu de* 63°,, *lisez* 64°

Page 18, ligne 4, au lieu de *entre* 0 *et* 1, lisez *entre* 1 *et* 2

Page 20, ligne 10, au lieu de $z = 62°$, lisez $z = 64°$

Idem, ligne 11, au lieu de $z = 65°$, lisez $z = 66°$

Page 23, ligne 13, au lieu de la valeur de F' qui est écrite, *lisez*

$$F' = \frac{\frac{n^2 \sin^2 z}{6(\cos z + m \sin z)^2}[3R(\cos z + m\sin z) - n] - \frac{R^3}{6}[3z\sin z - 2(1-\cos z)]}{a + R(1-\cos z)}$$

Page 27, ligne 5, à la suite du mot *centimètres*, *ajoutez* à partir du centre de la voûte

Page 29, ligne 2, *au lieu de* OA', *lisez* OA'

Idem, ligne 14, *au lieu de* V, *lisez* V', les deux fois

Page 30, ligne 6, en remontant, remplacez dans la formule le 2^me facteur $\frac{n(n-3c\gamma)\cos i}{3Rn(n+2c\gamma)\cos(z-i)}$ par $\frac{n(n-3c\gamma)\cos i}{3R(n+2c\gamma)\cos(z-i)}$

Page 32, ligne 9, au lieu de $z + z$, lisez $\cos(z+z)$

Page 34, ligne 8, au lieu de j', j'_1, j'_2, lisez j, j_1, j_2

Idem, ligne 10, *au lieu de* $\frac{(R+a)(R-a)}{2R^3} \times 100$, *lisez* $\frac{n(R+a)(R-a)}{2R^3} \times 100$

Page 37, ligne 9, après ces mots *remarqué par M. Audoy*, *ajoutez* et auparavant par M. Navier (*Science des Ingénieurs*)

Exemple numérique.

Soit, pour exemple, R = 5 mètres, a = 1 mètre, on trouve

$$V' = \frac{1,781818 - \varphi(z)}{10 + \pi(z)}.$$

Les substitutions donneront

$z = 60°$... $V' = 0,025384 = V$,... $F = 110V = 2,792$,
$z = 61°$... $V' = 0,02537$,
$z = 55°$... $V' = 0,0252$,
$z = 59°$... $V' = 0,025383$.

Marche des substitutions, degré d'approximation obtenu.

La méthode à suivre dans les substitutions, n'est pas arbitraire. Il faut d'abord faire $z = 60°$, puis $z = 61°$; si le second résultat est plus grand que le premier, on continue les substitutions dans le même sens; par exemple, $z = 65°$, $z = 63°$,..... ; mais, s'il est plus petit, on substitue des valeurs de z plus faibles, comme $z = 59°$, $z = 55°$ ....., et l'on continue, dans les deux cas, les substitutions jusqu'à ce qu'on arrive à un résultat plus grand numériquement que celui qui le précède et celui qui le suit immédiatement, dans l'ordre des substitutions de z croissant par des différences de 1°.

Cette règle donne le plus grand degré d'approximation qu'on puisse obtenir avec nos tables; mais il est évident, par l'exemple qui précède, que ce degré qui est marqué par la plus grande des différences entre le maximum auquel on s'arrête et les nombres consécutifs, est plus que suffisant pour les besoins de la pratique. En effet, ces nombres diffèrent à peine ici, dans la cinquième décimale, du maximum $V = 0,02538$ qui a été obtenu.

Quand on se sert des tables de logarithmes, il est

évident que l'on doit se contenter du logarithme de chaque valeur V', et ne passer du logarithme au nombre, que pour la valeur maximum et celle, de ses consécutives, qui sert à donner la limite de l'approximation.

Méthodes particulières, formules approximatives.

Les voûtes dont nous nous occupons actuellement sont celles pour lesquelles on a employé la différentiation avec le plus d'avantage. En égalant, à cet effet, à o le coefficient différentiel de V', on tombe sur une équation transcendante assez simple; mais cette équation ne peut également être résolue que par des tâtonnemens qui exigeraient l'emploi de deux nouvelles fonctions de z, et de deux nouvelles tables auxiliaires, qui compliqueraient inutilement la solution générale du problème des voûtes. D'ailleurs les voûtes à extrados parallèle ne s'emploient guère isolées et sans surcharge, ou, tout au moins, sans une petite chape d'une inclinaison suffisante pour bien faire écouler les eaux; or il en résulte, tout de suite, une grande différence dans la poussée.

Si, malgré le peu d'usage qu'on fait de ces voûtes, on voulait construire des tables complètes des valeurs de la poussée, comme ces valeurs sont proportionnelles aux quarrés des diamètres, il suffirait de s'occuper des voûtes dont le diamètre est 1.

Soit donc $\frac{1}{m}$ le rapport de l'épaisseur à l'ouverture, on aura

$$F' = \frac{m+1}{m} \cdot \frac{-\frac{(m+2)^2}{6m(m+1)} - \varphi(z)}{m+\pi(z)}.$$

Si, dans cette formule, on substitue $\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{m} = \frac{1}{20}$,

qui sont certainement des limites, et qu'on calcule les différences des poussées trouvées par substitutions, et de la valeur de F′, obtenue en faisant $z = 59°$, on reconnaît que l'erreur est moindre que le $\frac{1}{100}$ de la poussée, et que l'angle de rupture (1) ne peut pas différer, de 60°, d'un nombre plus grand que 7, attendu qu'il reste compris entre 63° et 53°.

Il suit, de là, que l'on a généralement

$$F = \frac{1,7301\,(2R+a)\,R - (R+a)^2}{\frac{3R}{a} + 6,1860}, \text{ à moins de } \frac{1}{100}F.$$

Si on ne se contentait point de cette approximation, la méthode des substitutions est tellement facile qu'il est à peine de quelque avantage d'avoir exactement la valeur de z qui donne le maximum. Cependant nous donnerons, pour ceux de nos lecteurs qui tiennent à une aussi grande précision, la formule suivante servant à calculer, à 1° près, la valeur dont il s'agit (2),

$$60° + \frac{941,7 - 335,8\frac{(m+2)^2}{m(m+1)} - 52,5\,m}{62,24 - 16,92\frac{(m+2)^2}{m(m+1)} + m},$$

(1) Dans le cours de ce mémoire, j'ai souvent désigné par l'expression abrégée : *angle de rupture*, l'angle que fait, avec la verticale, le joint de rupture qui se forme aux reins et qui répond au maximum de F′.

(2) La nature de ce recueil n'a pas permis d'insérer la démonstration analytique de cette formule, donnée par l'auteur, et qui est fondée sur le développement, en série, de la fonction $\varphi(z+x)$, au moyen des différences finies de $\varphi(z)$, lesquelles ont la propriété de décroître très-rapidement et d'être sensiblement les mêmes pour toutes les valeurs de $\varphi(z)$ comprises entre 45° et 70°.

(*Note du rédacteur.* J. V. P.)

expression dont on ne retiendra que la partie entière, et dont le deuxième terme peut d'ailleurs être négatif.

La substitution de cet angle, dans F′, donnera la poussée à 0,003 de sa valeur environ.

§ III.

VOÛTE A EXTRADOS DE NIVEAU.

Formules fondamentales.

Les voûtes extradossées de niveau, telles qu'elles ont été considérées par M. Audoy, ne présentent pas autre chose que la voûte, à extrados parallèle, recouverte d'une chape en maçonnerie, terminée à un plan supérieur horizontal. Le joint de rupture est supposé s'y replier verticalement. Voici la formule de cet auteur :

$$F'=\frac{(R+a)^2\sin.^2z\left\{\frac{R-a}{2}-\frac{R-2a}{6}\cos.z\right\}-\frac{R^3}{6}\left\{3z\sin.z-2(1-\cos.z)\right\}}{a+R(1-\cos.z)}.$$

On peut la réduire à une forme plus simple; mais elle n'est pas assez générale. Supposons une charge de maçonnerie s'élevant, au-dessus de la clef, d'une hauteur égale à c, ce qui représente également une charge proportionnelle de terre, on trouve facilement

$$F'=\frac{2R^3}{a}\times\frac{\frac{(R+a)^2(R-2a)}{6R^3}(1+\cos.z)\left\{\frac{3(R+a+c)(R-a)}{(R+a)(R-2a)}\cos.z\right\}+\varphi(z)}{\frac{2R}{a}+\pi(z)},$$

formule qu'on peut préparer ainsi :

$$F' = \frac{2R^3}{a} \times \frac{\frac{(R+a)^2(R-2a)}{6R^3}(1+\cos.z)(3-\cos.z)}{\frac{2R}{a}+\pi(z)} +$$

$$+\frac{2R^3}{a} \times \frac{\frac{(R+a)}{2R^3}\left\{c(R-a)+a(R+a)\right\}(1+\cos.z)+\varphi(z)}{\frac{2R}{a}+\pi(z)}.$$

Si l'on fait $1+\cos.z = \chi(z)$, fonction toujours comprise entre 0 et 1, et $(1+\cos.z)(3-\cos.z) = \psi(z)$, fonction toujours comprise entre 3 et 4, on aura la formule définitive

$$F' = \frac{2R^3}{a} \cdot \frac{\frac{(R+a)^2(R-2a)}{6R^3}\psi(z)+\frac{(R+a)}{2R^3}\left\{c(R-a)+a(R+a)\right\}\chi(z)+\varphi(z)}{\frac{2R}{a}+\pi(z)}.$$

Formules à employer.

Quand donc, il faudra chercher la poussée d'une voûte à extrados de niveau, on emploiera les formules suivantes :

$$G = \frac{(R+a)^2(R-2a)}{6R^3}, \quad M = \frac{(R+a)}{2R^3}\left\{c(R-a)+a(R+a)\right\}, \quad E = \frac{2R}{a},$$

$$V' = \frac{G\psi(z)+M\chi(z)+\varphi(z)}{E+\pi(z)}, \quad F = \frac{2R^3}{a}V.$$

Le plus ou le moins de complication des trois premières formules qui donnent les constantes, est à peu-près de nulle importance, car elles ne se calculent qu'une fois. Tout doit tendre, au contraire, à simplifier la formule d'essais V'. Mais le calcul même des constantes est ordinairement très-court, parce-

que rarement les données sont exprimées par des nombres de beaucoup de chiffres.

Les deux multiplications qui sont à faire, à chaque substitution, pour calculer le numérateur de V', auraient pu devenir plus faciles en joignant, à la table des valeurs de $\chi(z)$ et de $\psi(z)$, leurs produits par 2, 3, 4,... 9. Mais il sera mieux de se servir des logarithmes. Si, en effet, leur usage est jamais avantageux, c'est sans contredit quand on a, tout calculés d'avance et placés sous les yeux, les logarithmes de plusieurs des nombres qui doivent être employés comme facteurs.

En général, il suffit de trouver V avec quatre ou cinq chiffres significatifs. Tous les essais qui doivent conduire à F, peuvent donc se faire avec les petites tables de logarithmes de Lalande, et même il ne sera pas nécessaire d'y tenir compte des parties proportionnelles.

Soit, pour exemple, $R=3^{mèt.}$, $a=1^{mèt.}$, $c=0$, on trouvera

Exemple numérique.

$$F=54V, \quad V'=\frac{0,29630\,\chi(z)+0,09876\,\psi(z)+\varphi(z)}{6+\pi(z)},$$

$z=59°$. $\quad \text{Log.}V'=\bar{2},38221,$

$z=60°. \ldots\ldots \quad \bar{2},38256,$

$z=61°. \ldots\ldots \quad \bar{2},38265=\log.V=\log.0,02413,$

$z=62°. \ldots\ldots \quad \bar{2},38196=\log.0,02409,$

$z=63°. \ldots\ldots \quad \bar{2},38136;$

d'où F = 1,30, à 0,002 près, erreur absolue.

Il est presque superflu de dire que, quand on ne se sert pas des logarithmes pour effectuer les multiplications, il suffit de calculer, une fois pour toutes, les

produits de G et M, par les parties entières de $\psi(z)$ et $\chi(z)$, de manière à n'employer, dans les essais, que la partie fractionnaire de ces fonctions.

Table des résultats relatifs au cas d'une charge nulle.

Dans les cas d'une charge c, nulle, les substitutions ne sauraient être nombreuses, si l'on se sert des résultats suivans où z est l'angle de rupture :

$$\frac{a}{2R}=\frac{1}{4},\ \ldots\ z=55^\circ.\ \ldots\ F=0{,}03412.4R^2,$$

$$\frac{a}{2R}=\frac{1}{5},\ \ldots\ z=59^\circ.\ \ldots\ F=0{,}03606.4R^2,$$

$$\frac{a}{2R}=\frac{1}{6},\ \ldots\ z=61^\circ.\ \ldots\ F=0{,}03620.4R^2,$$

$$\frac{a}{2R}=\frac{1}{12},\ \ldots\ z=62^\circ.\ \ldots\ F=0{,}03082.4R^2,$$

$$\frac{a}{2R}=\frac{1}{24},\ \ldots\ z=65^\circ.\ \ldots\ F=0{,}02408.4R^2.$$

Construction de tables des poussées dans le cas général.

Au reste, il ne sera pas très-long de construire des tables pour ce genre de voûtes. Soit $2R=1$, $a=\frac{1}{m}$, $c=\frac{1}{p}$, vous aurez, pour $c=0$,

$$F'=\frac{m}{4}\times\frac{\frac{(m+2)^2}{m^3}\chi(z)+\frac{(m+2)^2(m-4)}{m^3\ 6}\psi(z)+\varphi(z)}{m+\pi(z)};$$

et, pour $c=\frac{1}{p}$,

$$F'=\frac{m}{4}\times\frac{\frac{(m+2)^2}{m^3}\chi(z)+\frac{(m+2)^2(m-4)}{m^3\ 6}\psi(z)+\varphi(z)}{m+\pi(z)}+\frac{\frac{m^2-4}{4mp}}{m+\pi(z)}\chi(z).$$

On fera $\frac{1}{m}=\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \ldots\ \frac{1}{20},\ \frac{1}{22},\ \frac{1}{24}$; valeurs que l'on combinera avec $\frac{1}{p}=0,\ \frac{1}{p}=\frac{1}{40},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{25},\ \ldots\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5}$.

A l'aide des formules et des résultats trouvés pour $\frac{1}{p} = 0$, il sera facile de calculer les autres : voici un procédé qui aidera beaucoup.

Cherchez, pour chaque valeur de m, l'angle z qui rend un maximum le terme $\frac{(m^2-4)}{4mp} \frac{\chi(z)}{\pi(z)+m}$; il est évident que l'inclinaison du joint de rupture sera comprise entre cet angle et le joint de rupture de la même voûte dépouillée de sa surcharge. Or, le maximum de $\frac{\chi(z)}{\pi(z)+m}$, a lieu par la valeur de z, tirée de l'équation

$$\text{Cos.}z = \frac{-2\sqrt{m+1} + m + 2}{m};$$

d'où l'on déduit le tableau suivant contenant les valeurs de la variable z, qui rendent un maximum le terme dû à la charge, et les valeurs de ce terme, désignées généralement par P, quand la charge est l'unité :

$\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$ ..	$z=67°$..	$P=0,143$	$\frac{1}{m} = \frac{1}{12}$ .. $z=55°$.. $P=0,275$
$\frac{1}{m} = \frac{1}{5}$ ..	$z=64°$..	$P=0,177$	$\frac{1}{m} = \frac{1}{14}$ .. $z=53°$.. $P=0,289$
$\frac{1}{m} = \frac{1}{6}$ ..	$z=62°$..	$P=0,200$	$\frac{1}{m} = \frac{1}{16}$ .. $z=52°$.. $P=0,300$
$\frac{1}{m} = \frac{1}{7}$ ..	$z=61°$..	$P=0,219$	$\frac{1}{m} = \frac{1}{18}$ .. $z=50°$.. $P=0,309$
$\frac{1}{m} = \frac{1}{8}$ ..	$z=60°$..	$P=0,234$	$\frac{1}{m} = \frac{1}{20}$ .. $z=50°$.. $P=0,317$
$\frac{1}{m} = \frac{1}{9}$ ..	$z=59°$..	$P=0,247$	$\frac{1}{m} = \frac{1}{22}$ .. $z=49°$.. $P=0,325$
$\frac{1}{m} = \frac{1}{10}$ ..	$z=57°$..	$P=0,258$	$\frac{1}{m} = \frac{1}{24}$ .. $z=48°$.. $P=0,342$

Règle pour trouver le joint de rupture.

A l'aide de ce tableau, qu'il n'est pas nécessaire d'étendre davantage, étant donnée une charge $\frac{1}{p}$ et une épaisseur $\frac{1}{m}$, on tombera assez vite sur l'angle de rupture, en partageant l'intervalle compris entre la valeur de z, tirée de ce tableau, et celle qui donnerait le maximum, s'il n'y avait pas de charge, en parties inversement proportionnelles à la poussée F, trouvée dans ce dernier cas, et à la valeur numérique de P, inscrite à côté de z, multipliée par $\frac{1}{p}$.

L'angle ainsi déterminé ne saurait différer beaucoup de l'angle de rupture, et il ne restera que peu ou même point d'essais à faire.

Il est évident que cette division, en parties inversement proportionnelles à deux nombres, n'a besoin d'être faite qu'approximativement, et sans qu'il soit nécessaire d'avoir très-exactement la poussée de la voûte supposée sans surcharge.

Exemple numérique et observations.

Soit, pour exemple, $\frac{1}{m} = \frac{1}{12}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{10}$. Si l'on partage l'intervalle compris entre 62° et 55°, en parties inversement proportionnelles à 0,0275 et à 0,0308, ou simplement à 27 et 31, on trouve $z = 58°$. Ce qui est précisément l'angle de rupture de cette voûte, à moins de 1° près.

L'observation des formules fait voir que, toutes les fois que la voûte a pour épaisseur la moitié de l'ouverture, la charge, quelle qu'elle soit, ne change ni la poussée ni l'angle de rupture; résultat qui serait

assez remarquable si une aussi forte épaisseur était usitée.

On reconnaîtra aussi, en considérant les deux tableaux que nous venons de donner, que, pour une épaisseur comprise entre le $\frac{1}{6}$ et le $\frac{1}{7}$ de l'ouverture, l'angle de rupture ne change pas et la voûte s'ouvre au même point des reins, vers l'angle de 61°, quelle que soit la charge.

§ IV.

VOÛTE EXTRADOSSÉE EN CHAPE.

La chape est inclinée de plus de 30° sur l'horizon.

La formule donnée par M. Audoy, pour les voûtes extradossées en chape, est (*Mémorial*, N°. 4) Formules fondamentales.

$$F=\frac{\frac{n^2\sin.^2 z}{6(\cos.z+m\sin.z)}\left\{3R(\cos.z+m\sin.z)-n\right\}-\frac{R^3}{6}\left\{3z\sin.z-2(1-\cos.z)\right\}}{R+a-R\cos.z}.$$

Ici n est la hauteur du sommet de la chape au-dessus du plan des naissances, et m la tangente de l'inclinaison de cette chape sur l'horizontale; nous conserverons la quantité n, dans les formules, ou nous la remplacerons par $R+a+c$, c étant la hauteur du faîte de la chape au-dessus du bandeau. Quant à la tangente m, M. Persy lui a substitué l'angle d'inclinaison de la chape sur la verticale: il est un peu plus commode de substituer l'angle, avec l'horizon, que nous appellerons i, de sorte que $m = \text{tang.}i$.

Enfin, on se rappellera que la formule ci-dessus suppose que le joint de rupture se prolonge, dans la maçonnerie de la chape, sans changer de direction;

hypothèse qui est la plus probable quand cette chape a une inclinaison assez forte.

D'après cela, on aura, dans le cas actuel,

$$F=\frac{2R^3}{a}V,\quad V'=\frac{\frac{n^2\cos.i}{2R^2\cos.(z-i)}\chi(z)\left\{1-\frac{n\cos.i}{3R\cos.(z-i)}\right\}+\varphi(z)}{\pi(z)+\frac{2R}{a}}.$$

Angle auxiliaire servant à simplifier les calculs

ξ étant un angle auxiliaire introduit pour la facilité du calcul, on posera

$$1+\frac{n\cos.i}{3R\cos.(z-i)}=1+\cos.\xi=\chi(\xi),\qquad (1)$$

et l'on trouvera, par des transformations très-simples,

$$V'=\frac{\frac{3n}{2R}\chi(z)\left\{\psi(\xi)-3-\left(\chi(\xi)-1\right)\right\}+\varphi(z)}{\pi(z)+\frac{2R}{a}}.\qquad (2)$$

Remarquez que $\psi(\xi)-3$ et $\chi(\xi)-1$ ne sont autre chose que les parties décimales des fonctions $\psi(\xi)$ et $\chi(\xi)$, qu'on trouve dans nos tables.

Quant à l'angle ξ, l'équation qui le détermine est celle-ci

$$\cos.\xi=\frac{\frac{n\cos.i}{3R}}{\cos.(z-i)}.$$

On peut le calculer avec des tables de logarithmes, ou seulement avec nos tables; car, en ne prenant

(1) Il est nécessaire de dire que cette équation peut être posée sans que ξ puisse devenir imaginaire, tant que l'on est dans les limites d'inclinaison ou des longueurs de n, qui sont usitées (*Voy.* plus loin, une discussion à ce sujet). S'il en était autrement, il faudrait employer la formule propre aux chapes peu inclinées.

que la partie décimale des valeurs de $\chi(z)$, on a celles de cos. z.

Mais, au lieu de chercher ξ par le calcul, il sera plus simple d'avoir recours à l'épure même de la voûte. Soit (*Fig.* 1, Pl. I^re^.) cette épure; soit *ja* le joint de rupture dont on veut faire l'essai et qui fait, avec la verticale, l'angle z, on a, dans le triangle OAa,

$$OA : Oa :: \cos.(z-i) : \cos.i; \qquad Oa = \frac{OA \cos.i}{\cos.(z-i)} = \frac{n \cos.i}{\cos.(z-i)}.$$

Donc $\cos.\xi = \frac{Oa}{3R}$, et $\chi(\xi) = 1 + \frac{Oa}{3R}$.

On conclut, de là, la règle suivante :

Règle pour faire l'essai d'un joint de rupture.

Étant donné une voûte, en plein cintre, recouverte d'une chape inclinée de plus de 30° sur l'horizon, pour faire l'essai d'un angle de rupture, on calculera d'abord $\frac{3n}{2R}$: c'est le rapport du triple de la montée du faîte de la voûte au diamètre; puis, sur l'épure et sur la direction du joint d'essai, on mesurera la longueur du rayon qui irait du centre de la voûte au plan de la chape; on divisera cette longueur par trois fois le rayon, on ajoutera l'unité au quotient, et, cherchant dans la table des valeurs de $\chi(z)$, celle qui en

---

(2) Cette formule s'applique aussi au cas d'une voûte extradossée de niveau sans surcharge, et telle que les voussoirs se prolongent jusqu'à l'extrados ; on a alors

$$F = \frac{2R3}{a} V, \quad V' = \frac{\frac{3n}{2R}\chi(z)\left\{+(\xi) - 3 - \left(\chi(\xi) - 1\right)\right\} + \varphi(z)}{\pi(z) + \frac{2R}{a}}, \quad \cos.\xi = \frac{\frac{n}{3R}}{\cos.s}.$$

approche le plus, on prendra la différence entre cette valeur de $\chi(z)$ et celle de $\psi(z)$, qui est écrite à côté d'elle, sur la même ligne horizontale, abstraction faite des parties entières; la différence étant appelée Δ, on la substituera dans la formule

$$V' = \frac{\frac{3n}{2R}\chi(z)\Delta + \varphi(z)}{\pi(z) + \frac{2R}{a}},$$

en ayant soin de ne pas confondre la valeur de $\chi(z)$, qui entre dans cette formule, et la valeur de $\chi(\xi)$ dont il vient d'être question dans le calcul de Δ. Rien n'est plus simple que cette méthode, où l'on peut très-bien se passer des tables de logarithmes.

Si l'on n'a pas une grande épure déjà toute faite, de la voûte, mieux vaut en construire une exprès pour le calcul de la poussée, si toutefois l'ensemble des lignes de la *Fig.* 1 mérite le nom d'épure. Supposez que le rayon soit représenté par 30 centimètres effectifs, la valeur de $\frac{n}{3R}$ sera, en centimètres, $\frac{n}{R} \times 10$; portez ce nombre de centimèt., sur l'axe de la voûte, de O en A', et menez, par ce point, une parallèle à la chape; au lieu de mesurer Oa, vous estimerez Oa' en centimètres, et le nombre trouvé, divisé par 30, sera évidemment la valeur de $\frac{Oa}{3R} = \cos.\xi$.

Complément de cette règle.

Ainsi, à la règle qu'on vient de donner, il faut joindre celle-ci : prenez le rapport de n à R; multipliez-le par 10, et portez le résultat, en centimètres

effectifs, sur l'axe de la voûte, à partir de son centre; par le point ainsi fixé, menez une parallèle à la chape; elle interceptera, sur la direction de chaque joint d'essai, une longueur que vous estimerez en centimètres, et que vous diviserez ensuite par 30; le quotient représentera le nombre auquel il faut ajouter l'unité, et qu'il faut ensuite chercher dans la table des valeurs de $\chi(z)$.

Cette construction est tout-à-fait indépendante de l'échelle sur laquelle les données de la voûte peuvent être supposées tracées en projet; elle conviendra généralement, parce que Oa' ne dépassera guère la longueur du double décimètre; sinon on multiplierait le rapport $\frac{n}{R}$ par $\frac{20}{3}$, et chaque longueur Oa', estimée en centimètres, serait divisée par 20 et non par 30.

Combien de substitutions faudra-t-il faire?

Nombre de substitutions nécessaires; formules d'interpolation propres à toutes les voûtes.

On prendra d'abord $z=50°$, $z=60°$, $z=70°$, et le plus ordinairement, les résultats donnés par ces trois substitutions, seront tels que celui du milieu surpassera les deux autres; s'il en était autrement, il faudrait encore prendre $z=40°$ ou $z=80°$, suivant que la chape serait beaucoup ou peu inclinée.

Dans tous les cas, par trois ou quatre substitutions, au plus, on arrivera à trois valeurs de V', que j'appelle α, 6, γ, et on aura l'angle de rupture et la poussée avec une exactitude suffisante, à l'aide des deux formules

$$z=z'+\frac{5(7-\alpha)}{26-\alpha-\gamma}, \quad (1) \qquad F=\frac{2R^3}{a}\left\{6+\frac{(\gamma-\alpha)^2}{8(26-\alpha-\gamma)}\right\},$$

z' représentant l'angle qui a donné 6.

(1) Si, au lieu d'être distantes entre elles de 10°, les valeurs

Il est facile de démontrer ces deux formules : en effet, α, 6, γ correspondant aux angles $z' - 10^\circ$, z' et $z' + 10^\circ$, si je désigne par $z'+x$ une valeur quelconque de z; que je fasse $V' = A + Bx + Cx^2$, A, B, C étant des coefficiens indéterminés, j'aurai les trois équations

$$\alpha = A - 10B + 100C, \quad 6 = A, \quad \gamma = A + 10B + 100C;$$

d'où l'on tire $\quad B = \frac{\gamma - \alpha}{20}, \quad C = -\frac{26 - (\alpha+\gamma)}{200}.$

Or, si on différentie la valeur de V', on voit que son maximum a lieu pour $x = -\frac{B}{2C}$, et que $V = A - \frac{B^2}{4C}$. Ces équations conduisent à celles que nous voulons démontrer quand on y substitue les valeurs de A, B, C.

Il est évident que ces formules approchées, qui équivalent à la règle de fausse position, sont générales ; elles s'appliquent à tous les genres de voûtes et à toutes les méthodes d'essais. Ainsi on peut l'employer pour les tâtonnemens géométriques que Coulomb a conseillés lui-même ; mais on reconnaîtra bien que la recherche des centres de gravité des quadrilatères curvilignes, rend ces tâtonnemens plus longs et plus sujets à erreur que l'emploi de nos tables et de nos formules.

Exemple numérique.

Appliquons ce qui vient d'être dit à la voûte des magasins à poudre de petites dimensions, que M. le colonel P. Bergère, a considérée au N°. 4 du *Mémorial*, page 97. « Dans cette voûte, $R = 2^m,80$, $n = 4^m,80$, $a = 1^m$, et le plan extérieur de la chape étant tangent au bandeau, on trouve

---

α, 6, γ l'étaient d'une autre quantité p, la valeur de F resterait la même, et celle de s deviendrait $s = s' + \frac{p(\gamma - \alpha)}{2(26 - \alpha - \gamma)}$.

$$\frac{3n}{2R}=2{,}5714, \quad \frac{2R}{a}=5{,}60, \quad \frac{n}{R}\times 10=17^{c},143.$$

Je prends donc (*Fig.* 1), $O'A'=17^{c},143$, et, par le point A', je mène une parallèle à la chape.

Soit ensuite $z=50°$, on obtiendra

$$\frac{Oa'}{3o}=\frac{13{,}88}{3o}=0{,}4627.$$

Je cherche, dans la table des valeurs de $\chi(z)$, le nombre 1,4627, il correspond à 62°; je prends la différence entre $\psi(62°)$ et $\chi(62°)$, abstraction faite des entiers, et je trouve 0,2490. De plus, les tables donnent

$$\chi(50°)=1{,}6428, \quad \varphi(50°)=\bar{1},3976, \quad \pi(50°)=5{,}60;$$

j'ai donc

$$V'=\frac{2{,}5714\times 1{,}6428\times 0{,}2490+\bar{1},3976}{5{,}60+5{,}60}=0{,}0401=\alpha.$$

On trouve de même, pour

$$z=60°,\ldots\ldots V=0{,}0406=6;\ z=70°,\ldots\ldots V=0{,}03670=7;$$

et, par les formules de fausse position, on conclut

$$z=60°-\frac{0{,}0034\times 5}{0{,}0044}=56°,\ V=0{,}0406+\frac{0{,}00001156}{0{,}035}=0{,}0409,$$

$$F=21{,}95\ V=1{,}796.$$

Cas d'une surcharge en terre.

La voûte peut être recouverte de terre, et celle-ci terminée par un plan supérieur parallèle à la chape, horizontal ou même incliné d'une manière quelconque. Dans le premier cas, on doit supposer que la fissure se prolongera dans la terre sans se briser, et la formule qu'on trouverait, dans cette hypothèse, ne donnerait pas des valeurs très-différentes de celles qu'on obtient en remplaçant cette couche de terre,

qui a partout la même épaisseur, par une couche de maçonnerie d'une épaisseur plus faible dans le rapport de la densité de la terre à celle de la maçonnerie. L'inexactitude de cette hypothèse revient à l'impossibilité que la ligne de fissure, dans la terre, soit intermédiaire entre la verticale et le prolongement du joint qui s'est formé dans la maçonnerie; or, cette direction, loin d'être impossible, est évidemment la plus probable. Il y a d'ailleurs un très-grand avantage à ne pas changer de formule (1).

Si donc, c est l'épaisseur verticale de la couche de terre, γ le rapport de la densité de cette terre à celle de la maçonnerie, il faut, pour calculer la poussée, se servir des formules posées plus haut en ayant soin de remplacer n par $n + \gamma c$.

Quand la charge n'est pas terminée à un plan supérieur parallèle à la chape, il est nécessaire de supposer que le joint se replie verticalement au dedans de la

---

(1) Si cependant on voulait que le joint, en quittant l'extrados de la chape, se repliât verticalement dans la terre, il faudrait introduire quelques termes indiqués dans le mémoire de M. Audoy, et qui, après simplifications, donnent l'expression

$$F' = \frac{2R^3}{a} \frac{\frac{3(n+2c\gamma)^2}{2R(n-3c\gamma)} \times \frac{n(n-3c\gamma)}{3Rn(n+2c\gamma)\cos.(\varepsilon-i)} \cos.i \; \chi(\varepsilon) \left\{ 1 - \frac{n(n-3c\gamma)}{3R(n+2c\gamma)\cos.(\varepsilon-i)} \cos.i \right\} + \varphi(\varepsilon)}{\pi(\varepsilon) + \frac{2R}{a}};$$

formule où l'on ferait $\cos.\xi = \frac{n(n-3c\gamma)\cos.i}{3R(n+2c\gamma)\cos.(\varepsilon-i)}$, et qui, à part le calcul des constantes, serait aussi courte à traiter que la première. On mènerait une parallèle à la chape par un nouveau point A' (*Fig.* 1), tel que la distance OA' fût égale à $\frac{n(n-3c\gamma)}{R(n+2c\gamma)} \times 10$, estimée en centimètres.

terre; or, cela complique beaucoup trop les formules (1), et il faut se contenter alors de calculer la poussée dans la supposition que le joint s'est replié dans la maçonnerie de la chape, à partir de la ligne d'extrados. Cette hypothèse tend à donner des poussées un peu trop fortes, ce qui n'est pas un inconvénient grave; on tombe alors dans les formules propres aux voûtes à chape peu inclinée, dont il va être question.

La chape est inclinée à moins de 30° *sur l'horizon.*

Je viens de dire que, dans les voûtes dont la chape s'éloigne peu de l'horizontale, on doit supposer que le joint se replie verticalement plutôt que de se prolonger en ligne droite; comme l'angle de rupture ne dépasse pas généralement, ou ne dépasse que peu 60°, c'est vers l'angle de 30°, avec l'horizon, que l'inclinaison de la chape d'une voûte oblige à cette hypothèse. Formule fondamentale.

M. Persy a donné la formule qui convient alors; elle peut être mise sous la forme suivante :

$$F'=\frac{2R^3}{a}\cdot\frac{\frac{n(R+a)}{6R^3}\chi(z)\left\{3(R-a)-\frac{(R+a)(R-2a)}{n}\frac{\cos.(z-i)}{\cos.i}\right\}+\varphi(z)}{\pi(z)+\frac{2R}{a}},$$

La meilleure manière de disposer cette expression pour les substitutions numériques, est celle-ci : calculez la constante G et l'angle u, par ces relations Méthode purement numérique pour calculer la poussée.

$$G=\frac{n}{2R}\left(1-\frac{a^2}{R^2}\right),\quad \cos.u=\frac{1}{12\cos.i}\left(1+\frac{a}{R}\right)^2\left(1-\frac{2a}{R}\right);$$

puis faites $u-i=x$, $u+i=\lambda$.

(1) On trouvera d'ailleurs la solution de ce cas à la fin de ce mémoire : article des *voûtes à intrados elliptique*.

Les deux angles $\varkappa$ et λ étant des constantes, on aura à effectuer les substitutions dans la formule

$$V' = \frac{\chi(z)\left\{G - \cos.(z-\lambda) - \cos.(z+\varkappa)\right\} + \varphi(z)}{\pi(z) + \frac{2R}{a}}.$$

Comme la table des valeurs de $\chi(z)$ est aussi une table de cosinus, en y négligeant l'unité qui forme la partie entière, rien ne sera plus facile que l'emploi de cette formule d'essai dans laquelle, bien entendu, on aura égard au signe de $(z+\varkappa)$.

V étant le maximum de V', vous poserez enfin

$$F = \frac{2R^3}{a} V.$$

Ces formules sont très-simples et conviendraient aux voûtes à extrados de niveau, à peu-près comme celles que nous avons déjà données, qui cependant leur sont préférables.

Méthode graphique pour calculer la poussée.

Mais nous pensons qu'il est plus simple d'employer encore ici une construction géométrique. En mettant l'expression de V', sous la forme

$$V' = \frac{\frac{\chi(z)}{100}\left\{100\,\frac{n(R+a)(R-a)}{2R^3} - 100\,\frac{(R+a)^2(R-2a)\cos.(z-i)}{6R^3\quad\cos.i}\right\} + \varphi(z)}{\pi(z) + \frac{2R}{a}},$$

on en tire la règle suivante :

Calculez la quantité $\frac{(R+a)^2(R-2a)}{6R^3}$; multipliez-la par 100, et considérez le produit comme exprimant des centimètres, décrivez, avec ce nombre de centi-

mètres pour rayon, un quart de circonférence de cercle (*Fig.* 2), et marquez, sur ce quart de circonférence, les points qui sont à 50°, 60°, 70° de la verticale.

Calculez, de même, $\frac{n(R+a)(R-a)}{2R^3}$, que vous multiplierez aussi par 100, le produit exprimant des centimètres; retranchez-en assez d'unités entières pour avoir une longueur qui soit plus grande que le rayon qu'on vient de calculer, mais qui ne sorte pas du papier, à peu près comme le montre la *Fig.* 2. Soit N le nombre entier retranché; portez ce qui reste, de O en A', et, par le point A', menez une parallèle à la chape; quand vous voudrez faire l'essai d'un joint O*j*, vous menerez la verticale *ja'*, et, après l'avoir estimée en centim., vous la substituerez dans l'expression

$$V' = \frac{\frac{1}{100}\chi(z)(N+ja')+\varphi(z)}{\pi(z)+\frac{2R}{a}}.$$

Cette formule est très expéditive. Quelqu'un qui entreprendrait de construire des tables, et qui se servirait, pour cela, de la même épure sur laquelle seraient tracés, d'une manière permanente, les rayons qui font, avec la verticale, les angles 40°, 50°, 60°, 70°, celui-là, sans doute, la préférerait de beaucoup à la méthode purement numérique.

Quand vous aurez fait trois ou quatre substitutions, selon qu'il sera nécessaire pour arriver à une valeur de V', plus grande que celle qui la précède et que celle qui la suit, vous agirez exactement comme il a été prescrit pour les voûtes à chape très inclinée, en employant les mêmes formules de fausse-position.

Exemple numérique.

Soit, pour exemple, une voûte ayant $3^m,10$ de rayon, une épaisseur aux reins égale à 1 mètre, une chape inclinée à 20° sur l'horizon et tangente à l'extrados du bandeau; ce qui donne

$$i=20^\circ,\quad n=\frac{4^m,10}{\cos.i}=4,363-\frac{2R}{a}=6,20,$$

et
$$\frac{(R+a)^2\,(R-2a)}{6R^3}\times 100=10,045.$$

Je décris (*Fig.* 2), avec un rayon égal à $10^c,045$, un quart de circonférence; je fixe les points j', j'_1, j'_2 à 50°, 60°, 70° de la verticale, puis je calcule

$$\frac{(R+a)\,(R-a)}{2R^3}\times 100=63,05;$$

de ce résultat, je retranche le nombre entier $N=50$, le reste étant 13,05. Je prends $OA'=13^c,05$; je mène, par le point A', une ligne formant 20° avec l'horizon, puis je fais les substitutions suivantes :

$$z=50^\circ,\ldots V'=\frac{\frac{1}{100}\times 1,6428\,(50+2,92)+\bar{1},3976}{6,20+5,60}=0,02262=\alpha,$$

$$z=60^\circ,\ldots V'=\frac{\frac{1}{100}\times 1,5\,(50+4,86)+\bar{1},4264}{6,20+4}=0,02444=6,$$

$$z=70^\circ,\ldots V'=\frac{\frac{1}{100}\,1,34202\,(50+6,2)+\bar{1},4609}{6,20+3,0396}=0,02334=\gamma.$$

Si, à ces trois résultats dont l'intermédiaire est le plus grand, vous appliquez les formules de fausse position qui donnent z et F (*pag.* 27), vous trouverez $z=61^\circ$ et $F=1,469$.

Cette méthode sera celle qu'on emploiera le plus fréquemment; les chapes des casemates n'ayant pas ordinairement une inclinaison, sur l'horizontale, plus grande que 30°.

On ne pense pas d'ailleurs que, pour ces sortes de voûtes, les formules propres à celles dont l'extrados est de niveau, puissent être employées. Car, si on les avait suivies, on eût trouvé $F = 1{,}38$, valeur qui diffère, de la première, de $\frac{1}{15}$ environ de celle de la poussée.

L'exemple qu'on vient de traiter est celui des casemates de la plupart des casernes voûtées que nous construisons. Quand elles sont à deux étages, il y a entre le sol et la clef de la voûte, un plancher ou une voûte extradossée de niveau et d'une faible épaisseur. Dans ce dernier cas, il faut calculer la poussée de cette voûte, et joindre son moment à celui de la première, dans l'équation d'équilibre qui fournit l'épaisseur du piédroit.

Cas où la voûte est chargée de terre.

Supposons maintenant une charge de terre, d'une épaisseur constante et égale à c, comptée sur la verticale; en admettant, ce qui est à peu près probable, que la ligne de fissure suivra la verticale, il suffira, avant de substituer n, de l'augmenter du produit de la hauteur de la charge par le rapport γ de la densité de la terre à celle de la maçonnerie.

Si le plan supérieur qui limite la terre, fait, avec l'horizontale, un angle i' plus petit que i, et que c soit l'épaisseur de la charge au sommet de la voûte, on peut encore remplacer chaque colonne élémentaire de terre par une colonne proportionnelle de maçonnerie; alors la valeur de n doit être remplacée, dans les for-

mules, par $n + c\gamma$, et celle de i par un angle i'', déterminé par l'équation facile à trouver

$$\text{tang.}i'' = (1 - \gamma)\,\text{tang.}i + \gamma\,\text{tang.}i'.$$

Ainsi, quand le plan supérieur est horizontal, tang.i' étant nul, l'angle à substituer dans la *Fig.* 2, à l'angle i, est celui dont la tangente a pour valeur $(1 - \gamma)$ tang.i : la ligne $A'a'$ n'étant plus parallèle à la chape.

On remarquera que le nouvel angle i'' est toujours plus petit que le premier i ; c'est ce qui fait voir que, bien qu'on ne fasse guère de chape sous une inclinaison plus faible que 15° ou 20°, il n'est pas moins nécessaire de pouvoir calculer la poussée des voûtes dont la chape serait encore moins inclinée à l'horizon.

Observation relative au cas où la poussée devient nulle.

On observera en outre, que, d'après la formule donnée pour les voûtes à chape très inclinée, la poussée devient nulle dès que n est assez grand pour qu'on ait (*Fig.* 1) :

$$1 = \frac{n\cos.i}{3R\cos.(z-i)} = \frac{Oa}{3R};$$

c'est-à-dire dès que la portion de la normale à la douelle intérieure, comprise entre l'intrados et l'extrados, est aussi grande que le diamètre de la voûte. Ce résultat est dû évidemment à ce qu'on a supposé que le joint de rupture, dans la terre, était incliné et non vertical ; il subsisterait encore si on changeait sa direction pourvu qu'elle restât inclinée ; or, quoiqu'on se serve quelquefois de l'hypothèse d'un joint suivant la verticale, et que nous ayons donné des formules dans cette hypothèse, il n'en est pas moins à peu-près certain que le joint de rupture est plus ou moins oblique. On peut donc conclure qu'il y a toujours une charge de terre pour laquelle et au-delà de

laquelle, la poussée de la voûte qui la porte est nulle, du moins en vertu de la tendance des voussoirs à tourner sur leurs arêtes d'intrados ou d'extrados, et c'est le seul mouvement que l'expérience ait démontré possible dans les voûtes en plein cintre. On doit conclure aussi que, loin d'augmenter avec l'épaisseur, la poussée d'une voûte peut diminuer et devenir nulle par les accroissemens de cette épaisseur (*); ce qui a déjà été remarqué par M. Audoy.

Détermination générale de l'épaisseur des piédroits des voûtes en chape.

L'équation du second degré, qu'il faut résoudre pour trouver l'épaisseur du piédroit, a été donnée, par M. Audoy, en supposant qu'on puisse, sans erreur sensible, introduire le moment du petit triangle de maçonnerie TVZ, (*Fig.* 1), lequel devient très grand quand la chape est peu inclinée et approche de l'horizontale. Voici une équation indépendante de cette hypothèse qui n'est plus permise dans ce cas.

Équation donnant l'épaisseur du piédroit.

Soit H la hauteur présumée HX, de la verticale passant par le milieu du piédroit cherché, depuis l'extrados de la chape jusqu'au sol; S la surface de la portion du profil de la demi-voûte qui est limitée à l'axe AO et à la verticale du parement intérieur du piédroit, δ la distance du centre de gravité de cette surface à cette même verticale; enfin h la hauteur du piédroit depuis le sol jusqu'aux naissances. Nommant, de

(*) Cette observation s'étend évidemment à une masse de terre homogène jouissant, en ses parties élémentaires, d'une certaine cohésion, et dans laquelle on pratiquerait une voûte non revêtue en maçonnerie.

plus, μ le coefficient de stabilité que M. Audoy a trouvé égal à 2 environ, et e l'épaisseur cherchée, l'équation de l'équilibre stable autour de l'arête extérieure de la base du piédroit, sera, à très peu près,

$$\mu F(h+R+a) = S\delta + Se + \frac{He^2}{2}.$$

Les quantités S et Sδ se calculeront par les formules suivantes, où ϖ représente le rapport de la circonférence au diamètre,

$$S = R\left(n - \frac{R\,\text{tang}.i}{2} - \frac{\varpi R}{4}\right), \quad S\delta = R\left\{\frac{n}{8} - \frac{R\,\text{tang}.i}{24} - \frac{R(3\varpi-4)}{96}\right\}.$$

Si l'on reconnaissait, après avoir obtenu e, que la valeur provisoirement attribuée à H, fût erronée, on recommencerait les calculs au moyen de la nouvelle valeur de H, résultante de l'épaisseur trouvée.

Ces formules sont évidemment applicables aux voûtes extradossées de niveau; mais, pour elles, il n'y a aucune incertitude sur H.

On pourrait remplacer cette équation, du second degré, par une construction géométrique, comme on peut le faire de toute équation de ce genre, et cela présenterait quelque avantage si on avait, à sa disposition, des tables où entreraient non-seulement la poussée d'une voûte semblable à la voûte proposée, mais encore trois argumens calculés dans la supposition de $2R = 1$ et $a = \frac{1}{m}$.

On aurait ainsi, avec toute l'exactitude désirable, l'épaisseur du piédroit; mais, en sacrifiant un peu de cette exactitude, on pourra n'avoir que deux coefficiens à calculer.

Formule d'interpolation pour calculer une table des épaisseurs de piédroits, relatives à diverses hauteurs.

En effet, si l'on construit la courbe des valeurs de e, pour diverses valeurs de h, on reconnaît qu'elle converge vers une asymptote verticale, qui détermine elle-même, l'épaisseur du piédroit dont la hauteur serait infinie. On peut remplacer cette courbe par une hyperbole d'une équation plus simple et ayant avec elle deux points communs et la même asymptote.

Les deux points qu'il paraît convenable de choisir sont ceux qui répondent à $h = 0$ et $h = R$. Soient e_0 et e_1 les épaisseurs relatives à ces suppositions, et e_∞ celle qui correspond à $h = \infty$, on posera

$$e_\infty - e = \frac{4R^2 b}{2Rd + h};$$

d et b étant des coefficiens constans qui seront déterminés par les équations

$$e_\infty - e_0 = \frac{2Rb}{d}, \quad e_\infty - e_1 = \frac{4Rb}{2d+1}.$$

Je remarque que les épaisseurs e_∞, e_1, e_0 sont proportionnelles à $2R$, quoique la valeur générale e ne le soit qu'autant que h l'est lui-même; désignant donc par ε_∞, ε_1, ε_0 les nombres qui représentent ces trois épaisseurs quand le diamètre est 1, on aura

$$d = \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_1}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}, \quad b = \frac{(\varepsilon_\infty - \varepsilon_0)(\varepsilon_\infty - \varepsilon_1)}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}.$$

Les nombres d et b peuvent être inscrits dans les tables ainsi que ε_∞, mais il ne sera pas nécessaire d'y inscrire la poussée, car elle se déduit trop facilement du nombre ε_∞ par l'équation $F = \frac{4R^2\varepsilon^2_\infty}{2\mu}$.

Ainsi, quand on voudra avoir l'épaisseur d'un

piédroit, il suffira de multiplier e_∞ par le diamètre, et de retrancher du produit la quantité

$$e_\infty - e = \frac{4R^2 b}{2dR+h}.$$

Conclusion.

Il résulte, de tout ce que nous avons dit au sujet des voûtes en plein cintre recouvertes d'une chape, que, pour construire des tables qui donnassent promptement les épaisseurs de leurs piédroits, il faudrait considérer les angles d'inclinaison du plan supérieur de la chape sur l'horizontale, comme croissant de 10 en 10 degrés, depuis 0 jusqu'à 50° inclusivement, en comprenant ainsi les voûtes à extrados de niveau, et en ne supposant pas d'inclinaison plus raide que celle de 50°; on aurait alors six classes de voûtes pour chacune desquelles on dresserait un tableau.

Dans la première colonne horizontale de ce tableau, on écrirait les valeurs de $\frac{1}{m}$ ou $\frac{a}{2R}$; savoir : $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$; et, dans la première colonne verticale, les valeurs, non pas de $\frac{n}{2R}$, mais de la quantité $\frac{n-R-a}{2R}$, qui s'en déduit et qui est la hauteur du faîte de la chape au-dessus de l'extrados du bandeau : c'est ce que nous avons désigné par $\frac{c}{2R}$ ou $\frac{1}{p}$, à l'article des *Voûtes extradossées de niveau*. Enfin on ferait $\frac{1}{p}=0$, $\frac{1}{p}=\frac{1}{40}, \frac{1}{30}, \frac{1}{25}, \ldots$

Dans chaque côté du tableau, on inscrirait les nombres s_∞, d, b, et, ce qui n'est pas très-nécessaire, l'angle de rupture.

A un calculateur tant soit peu exercé, il ne faudrait pas plus d'une heure ou deux pour calculer un cas complètement, et l'entreprise d'une pareille table, qui n'aurait besoin que d'être étendue à mille cas au plus et exigerait très-peu de frais, honorerait le corps auquel elle serait due (*).

§ V.

VOÛTES EN ANSE DE PANIER.

Méthode et dénominations générales.

Une voûte en anse de panier, étant donnée, comme celle de la *Fig.* 3 ou celle de la *Fig.* 5, il est clair que le difficile n'est pas de chercher la poussée, tant qu'on suppose le joint de rupture dans l'arc du sommet, mais bien de la calculer en admettant que la rupture ait lieu dans les arcs inférieurs. Voici une méthode assez simple, par laquelle, ayant calculé F′ en un point de raccordement de deux arcs, on peut obtenir sa valeur pour un point quelconque de l'arc inférieur.

Mais auparavant, il faut imaginer chacun des arcs qui forment la douelle intérieure de la voûte, prolongé jusqu'à sa rencontre avec la verticale qui passe par le centre de cet arc, et considérer chacune des voûtes en plein cintre, qui se trouvent données par cette construction, et qui ont toutes leur intrados limité à l'ex-

(*) L'auteur a été encouragé à s'occuper de cet objet, par l'attention que le comité des fortifications a accordée au travail de M Petit, inséré au présent numéro du *Mémorial*.

trados même de la voûte proposée. Ainsi (*Fig.* 3) l'arc BB_1, qui vient après l'arc supérieur AB, étant prolongé jusqu'en A_1, et la verticale O_1A_1 étant menée jusqu'au plan LY de la chape, en L_1, on a à considérer la voûte partielle, plein cintre, dont le rayon est O_1B, l'épaisseur a, la même que celle de la voûte donnée, et la chape L_1Y.

Il faut encore imaginer que la poussée d'une pareille voûte, au lieu de s'exercer en q_1, s'exerce en p_1, c'est-à-dire que la force horizontale, que nous avons supposée jusqu'ici appliquée au sommet de la voûte, en p, et qui doit empêcher un voussoir quelconque de tomber en tournant en dedans, que cette force, dis-je, reste appliquée toujours à la même hauteur, quelle que soit la voûte partielle que l'on considère, soit celle du sommet, soit la voûte des naissances, soit celle qui est intermédiaire dans le cas des anses de panier à cinq centres.

Il devient alors nécessaire de bien fixer, par rapport à chaque voûte, la distance A_1p_1. Or, de même que nous désignons Ap par a, de même nous désignerons A_1p_1 par a_1, et A_2p_2 par a_2 (*Fig.* 4): Le rayon de l'arc supérieur sera appelé R_0; celui de l'arc qui le suit R_1, et le suivant R_2. Quand la voûte donnée sera extradossée de niveau ou en chape, la charge de chaque voûte partielle changera; si elle est c, pour celle du sommet, c'est-à-dire si c est la hauteur du faîte de la chape au-dessus du bandeau, la charge des autres voûtes sera successivement c_1 et c_2; enfin les angles d'inclinaison, sur la verticale, des divers joints de raccordement, seront θ_0, θ_1, θ_2; le dernier de ces angles, savoir: θ_1 pour la voûte à trois centres, θ_2 pour celle

qui en a cinq, appartient au joint des naissances, que nous ne supposerons pas horizontal avec M. Audoy.

On trouvera très facilement les relations suivantes :

$$A_1p_1 \text{ ou } \omega_1 = a + (R_0 - R_1)\left\{2 - \chi(\theta_0)\right\},$$

$$A_2p_2 \text{ ou } \omega_2 = \omega_1 + (R_1 - R_2)\left\{2 - \chi(\theta_1)\right\};$$

et, quand il y a une chape inclinée de l'angle i sur l'horizon,

$$c_1 = c + R_0 - R_1 - (R_0 - R_1)\frac{\cos.(\theta_0 - i)}{\cos.i} =$$

$$= c - (R_0 - R_1)\frac{\chi(\theta_0 - i) - \chi(i)}{\cos.i},$$

$$c_2 = c_1 + R_1 - R_2 - (R_1 - R_2)\frac{\cos.(\theta_1 - i)}{\cos.i} =$$

$$= c_1 - (R_1 - R_2)\frac{\chi(\theta_1 - i) - \chi(i)}{\cos.i},$$

ou enfin, si le plan supérieur de la chape est horizontal,

$$c_1 = c + (R_0 - R_1)\left\{2 - \chi(\theta_0)\right\},\quad c_2 = c_1 + (R_1 - R_2)\left\{2 - \chi(\theta_1)\right\}.$$

Les poussées rapportées, ainsi qu'on vient de le dire, à une même horizontale px, peuvent se calculer par les formules données pour les voûtes en plein cintre, en modifiant seulement le facteur constant et le dénominateur du facteur variable ; ce qui laisse le numérateur de ce dernier facteur tout-à-fait intact, et permet de lui appliquer, si l'on veut, les méthodes de calcul imaginées pour les voûtes en plein cintre. On y substituera toujours l'épaisseur a, qui est la même pour toutes les voûtes partielles et pour la proposée,

et successivement c, c_1, c_2; R_0, R_1, R_2. Soit Z l'expression algébrique de ce numérateur ; Φ' la dénomination générale des valeurs de F′ qui appartiennent aux voûtes partielles; ces valeurs étant rapportées à l'horizontale px; soit pareillement Φ'_1 les valeurs de Φ' prises dans le second arc, et Φ'_2 celles de Φ', dans le 3^{me}, quand la voûte est à cinq centres. On aura, pour calculer Φ'_1, les équations

$$\Phi_1' = \frac{2aR_1(2R_1+a)}{a_1} \frac{Z}{\frac{2R_1}{a_1}+\pi(z)},$$

si la voûte est extradossée parallèlement,

$$\Phi_1' = \frac{2R_1^3}{a_1} \frac{Z}{\frac{2R_1}{a_1}+\pi(z)},$$

si la voûte est extradossée de niveau ou en chape.

Les mêmes formules donneront Φ'_2 pourvu qu'on remplace a_1 par a_2, c_1 par c_2, R_1 par R_2.

Nous rappellerons qu'au commencement de ce mémoire, nous avons dit, en parlant de la notation, que chacune des valeurs de F′, pourrait être désignée en faisant accompagner la lettre, F, de l'angle substitué: ainsi une valeur quelconque de F′ peut s'écrire $F(z)$. Cette notation devient nécessaire ici, et nous appellerons $F(\theta_0)$, $\Phi_1(\theta_0)$ les valeurs de F′ et de Φ_1', qui conviennent au premier joint de raccordement ; $F(\theta_1)$, $\Phi_2(\theta_1)$ celles qui conviennent au second, et enfin $F(\theta_2)$ la valeur de F′, pour le joint des naissances de la voûte à cinq centres.

Ces choses posées, on se rappellera encore que chaque valeur F, est le moment d'un voussoir tel que

AC (*Fig.* 3), divisé par le bras de levier Cx. Or, soit B le point de raccordement des deux arcs, on a, les voussoirs étant désignés par leur arc de douelle et les momens par m^t.,

m^t. AC autour de C=m^t. AB aut. de B+m^t. BC aut. de C+surf. AB × BD;

et, en considérant l'arc BC comme appartenant à la voûte partielle, en plein cintre, dont O$_1$B est le rayon, vous aurez

m^t. BC autour de C=m^t. A$_1$C aut. de C—m^t. A$_1$B aut. de B—surf. BA$_1$ × BD.

Ajoutant ces deux équations membre à membre,

m^t. AC. autour de C=m^t. AB aut. de B+m^t. A$_1$C aut. de C—m^t. A$_1$B aut. de B+BD (surf. AB—surf. A$_1$B).

Désignant par S$_0$, S$_1$, S$_2$ les surfaces des voussoirs qui correspondent aux joints de raccordement θ_0, θ_1, θ_2, et par s_0 et s_1 les surfaces des voussoirs, tels que BA$_1$, appartenant aux voûtes partielles, la dernière équation se traduit ainsi, après avoir divisé les momens par les bras de levier,

$$F = \Phi_1' + \frac{\left\{F(\theta_0) - \Phi_1(\theta_0)\right\}\left\{a + R_0\left[2 - \chi(\theta_0)\right]\right\} + (S_0 - s_0)\,R_1(\sin.z - \sin.\alpha)}{a_1 + R_1(1 - \cos.z)},$$

ou, en remplaçant $a + R_0\left\{2 - \chi(\theta_0)\right\}$ par $a_1 + R_1\left\{2 - \chi(\theta_1)\right\}$,

$$F = \Phi_1' + (S_0 - s_0)\,\frac{\left\{F(\theta_0) - \Phi_1(\theta_0)\right\}\dfrac{2 + \dfrac{a_1}{R_1} - \chi(\theta_0)}{S_0 - s_0} - \chi(90^\circ - \theta_0) + \chi(90^\circ - z)}{2 + \dfrac{a_1}{R_1} - \chi(z)}.$$

Cette formule est très générale, et sert à passer de F', calculée en un point de raccordement, à la valeur de F' dans l'arc immédiatement au-dessous. Ainsi, pour la voûte à cinq centres, on aura, dans l'arc des naissances,

$$F'=\Phi_2'+(\delta_1-s_1)\,\frac{\left\{F(\theta_1)-\Phi_2(\theta_2)\right\}\dfrac{2+\dfrac{a_2}{R_2}-\chi(\theta_1)}{S_1-s_1}-\chi(90^\circ-\theta_1)+\chi(90^\circ-z)}{2+\dfrac{a_2}{R_2}-\chi(z)}$$

On voit que, à part le calcul des termes constans, chacun des essais n'est pas long à faire. Il suffit d'adjoindre à la valeur de F', qui convient à la voûte en plein cintre où la rupture est censée avoir lieu, valeur modifiée seulement dans son facteur constant et son dénominateur, il suffit, dis-je, d'adjoindre un terme de la forme $K\frac{Q+\chi(90^\circ-z)}{D+\chi(z)}$, K, Q, D étant des constantes.

Appliquons ces généralités à diverses voûtes.

Voûtes en anse de panier à 3 centres, extradossées parallèlement

Dans les voûtes à extrados parallèle, la surface d'un voussoir n'est autre chose que l'épaisseur constante a, multipliée par la longueur du développement de l'arc intermédiaire entre l'extrados et l'intrados de la voûte. On en conclut $\delta_0-s_0=\frac{a\varpi\theta_0}{180}(R_0-R_1)$; l'angle θ_0 étant exprimé en degrés sexagésimaux, ϖ étant le rapport de la circonférence au diamètre, égal à 3,14159. De là suit cette règle :

Etant donnée une voûte à trois centres, dont R_0 est le rayon de l'arc du sommet, R_1 celui des arcs de naissances, et dont θ_0 est l'inclinaison, sur la verticale, du joint de raccordement, si vous voulez connaître la poussée, cherchez le joint de rupture dans l'arc du sommet, à l'aide de la formule de la page 13,

$$(1)\quad F' = \frac{-\frac{2}{3}a(R_0+a)^3 - 2aR_0(2R_0+a)\varphi(z)}{2R_0 + a\pi(z)};$$

il faudra, pour cela, faire deux ou trois substitutions; mais comme, en général, le point de rupture est dans l'arc des naissances, vous ne ferez d'abord que la seule substitution $z=\theta_0$, en revenant ensuite à la précédente s'il était nécessaire; vous connaîtrez donc $F(\theta_0)$, aussi bien que les constantes

$$a_1 = a + (R_0 - R_1)\{2 - \chi(\theta_0)\},\quad L = \frac{2aR_1(2R_1+a)}{a_1},\quad G = -\frac{(R_1+a)^3}{3R_1(2R_1+a)}.$$

Cette dernière sera mise sous la même forme que $\varphi(z)$, c'est-à-dire avec partie entière négative et partie décimale positive.

Calculant enfin les nouvelles constantes $\Phi_1(\theta_0)$, K, D, E, Q par les formules suivantes :

$$D = 2 + \frac{a_1}{R_1},\quad E = \frac{2R_1}{a_1},\quad \Phi_1(\theta_0) = L\frac{G - \varphi(\theta_0)}{E + \pi(\theta_0)},$$

$$K = \frac{\pi a\theta_0}{180}(R_0 - R_1),\quad Q = \frac{\{F(\theta_0) - \Phi_1(\theta_0)\}\{D - \chi(\theta_0)\}}{K} - \chi(30^\circ - \theta_0),$$

vous n'aurez plus (*), pour savoir si le joint de rup-

(*) Le plus ordinairement, la douelle de la voûte est composée de trois arcs de cercle de 60° chacun; on donne la demi-ouverture B,

ture est dans l'arc des naissances, qu'à rechercher le maximum de l'expression

$$(2)\quad F'=L\frac{G-\varphi(z)}{E+\pi(z)}+K\frac{Q+\chi(90^\circ-z)}{D-\chi(z)}.$$

Quand on supposera, comme l'a fait M. Audoy, que le joint des naissances est horizontal, et que la hauteur, sous clef, de la voûte, est connue et représentée par A, le calcul de la constante a_1 sera un peu simplifié; car on aura

$$a_1=a+A-R_1.$$

Il faudrait que la voûte donnée fût bien peu surbaissée pour que le joint de rupture se trouvât dans l'arc du sommet; ainsi, comme on l'a dit, dans la majeure partie des cas, on ne se servira qu'une fois de la formule (1). C'est pourquoi on devra l'employer sous la forme que nous lui avons donnée, préférablement à celle qui serait la plus convenable si plusieurs substitutions étaient à faire.

---

la montée A, sous clef, et ce que j'appellerai l'aplatissement de la voûte, c'est-à-dire cette fraction qui exprime le rapport de la différence, entre la demi-ouverture et la montée, à l'ouverture entière. Soit ν ce rapport, $\nu=\frac{B-A}{2B}$: si $\nu=\frac{1}{3}$, la voute est surbaissée au tiers, si $\nu=\frac{1}{4}$, elle est surbaissée au $\frac{1}{4}$. On trouvera facilement, à l'aide des relations posées par M. Audoy (*Mémorial*, N°. 4, pag. 40 et 41),

$$R_0=B+B_\nu\times 2{,}73205,\quad R_1=B-B_\nu\times 2{,}73205,\quad a_1=a+B_\nu\times 1{,}73205,$$

$$K=aB_\nu\times 2{,}8610,\quad F(\theta_0)=\frac{R_0(2R_0+a)\times 1{,}93116-(R_0+a)^2}{3R_0+44{,}7846};$$

après quoi on calculera facilement les autres constantes, et finalement la valeur (2) de F', la seule où, dans ce cas, on ait à faire plusieurs substitutions.

La formule (2) sera donc généralement la seule formule d'essais; on y substituera $z=\theta_0+10^\circ$, $z=\theta_0+20^\circ$, $z=\theta_0+30^\circ$, jusqu'à ce que l'on arrive à une valeur 6, de F', plus grande que celle α qui la précède et que celle γ qui la suit; ce qui arrivera ordinairement dès la seconde substitution, ou, tout au plus, à la troisième. Appliquant alors les formules d'approximation de la page 27, on trouvera $F=6+\frac{(\gamma-\alpha)^2}{8(2\,6-\alpha-\gamma)}$, et la valeur de l'angle de rupture sera la même qu'à la page dont il s'agit.

Calcul de l'épaisseur du piédroit.

S_1 étant la surface de la demi-voûte, le moment de S_1 par rapport au point B_1, sera donné par la valeur de F', désignée par $F(\theta_1)$ et tirée de l'équation (2) en y faisant $z=\theta_1$. Cette valeur étant multipliée par $a_1+R_1\left\{2-\chi(\theta_1)\right\}$, qui est le bras de levier de la poussée par rapport au point B_1 (*Fig.* 3), on en déduira, sans difficulté,

$$\frac{e^2h}{2}+F(\theta_1)\left\{a_1+R_1\left[2-\chi(\theta_1)\right]\right\}+S_1e=\left\{h+a_1+R_1\left[2-\chi(\theta_1)\right]\right\}\mu F;$$

équation dans laquelle la hauteur du piédroit est comptée de l'intrados de la voûte, et où l'on ne tient pas compte du petit triangle b_1B_1d, qui devient d'ailleurs nul quand le joint des naissances est horizontal: on se rappellera que μ est le coefficient de stabilité que M. Audoy a fait égal à 1,9.

Cette équation équivaut à celle-ci

$$e^2+2e\frac{S_1}{h}=2\mu F+\frac{2\left\{\mu F-F(\theta_1)\right\}\left\{a_1+R_1\left[2-\chi(\theta_1)\right]\right\}}{h}.$$

Si l'on connaît la montée de la voûte, A, prise sous clef, on aura

$$a_1 + R_1\{2 - \chi(\theta_1)\} = A + a ;$$

donc $$e^2 + 2e\frac{S_1}{h} = 2\mu F + \frac{2\{\mu F - F(\theta_1)\}(A+a)}{h}.$$

D'un autre côté, la valeur de S_1 est très-facile à calculer en multipliant a, par le développement de l'arc qu'on peut imaginer tracé entre l'extrados et l'intrados de la voûte donnée : on a

$$S_1 = \frac{a\varpi}{18}\left(R_0 + \frac{a}{2}\right)\theta_0 + \frac{a\varpi}{180}\left(R_1 + \frac{a}{2}\right)(\theta_1 - \theta_0) =$$

$$= \frac{a\varpi}{180}\left\{\theta_0(R_0 - R_1) + \theta_1\left(R_1 + \frac{a}{2}\right)\right\};$$

donc enfin

$$e^2 + 2e\frac{a}{h}\frac{\varpi}{180}\left\{(R_0 - R_1)\theta_0 + \left(R_1 + \frac{a}{2}\right)\theta_1\right\} =$$

$$= 2\mu F + \frac{2\{\mu F - F(\theta_1)\}(A+a)}{h},$$

équation dans laquelle il n'y a qu'à substituer les données de la voûte et la valeur de la poussée.

Anse de panier à trois centres, extradossée en chape ou de niveau.

Règle pour calculer la poussée.

Comme à la voûte précédente, a est l'épaisseur du bandeau, R_0 et R_1 sont les rayons des arcs du sommet et des naissances, θ_0 et θ_1 les angles ; avec la verticale, des joints de raccordement et des naissances ; c est la hauteur de la charge au-dessus du bandeau ; n la hauteur du faîte de la chape au-dessus de l'horizontale qui passe par les points les plus bas des naissances ; A est

la montée de la voûte sous clef ; B la demi-ouverture B_1R (*Fig. 3*), de cette voûte, i enfin l'angle de la chape avec l'horizon.

On a ici, pour déterminer $S_0 - s_0$,

$$\text{Surf. } AB = \text{tri. } O_1NL_1 + \text{trap. } OO_1L_1L - \text{sect. } OBA,$$

$$\text{Surf. } A_1B = \text{tri. } O_1NL_1 - \text{sect. } O_1BA_1 ;$$

donc

$$S_0 - s_0 = \text{trap. } OO_1L_1L + \text{sect. } O_1BA_1 - \text{sect. } OBA.$$

La surface du trapèze OO_1L_1L est égale à

$$\frac{1}{2} O_1P\,(O_1L_1 + OL),$$

d'où l'on déduit facilement

$$S_0 - s_0 = \frac{(R_0 - R_1)}{2} \sin.\theta_0\,(2a + a + \varepsilon_1 + R_0 + R_1) - \frac{\pi\theta_0}{360}(R_0^2 - R_1^2).$$

Il faut remarquer que les voûtes de l'espèce de celles que nous étudions, poussant beaucoup, la chape ne saurait être très-inclinée ; car, si on pouvait lui donner une grande hauteur, mieux vaudrait faire un plein cintre. D'après cela, on doit employer les formules qui conviennent à la supposition d'un joint qui se replie suivant la verticale, en quittant le bandeau. Vous suivrez donc cette règle :

Cherchez le joint de rupture dans l'arc du sommet, comme si la voûte était en plein cintre ayant une épaisseur a, un rayon R_0 et une charge c ; à cet effet, vous vous servirez de la formule

$$(3)\quad F' = \frac{2R_0^2}{a} \frac{\varphi(s) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{a}{R_0}\right)^2\left(1 - 2\frac{a}{R_0}\right)\chi(s)\left\{1 + 3\cos.i\,\frac{\left(1 - \frac{a}{R_0}\right)\left(1 + \frac{a+c}{R_0}\right)}{\left(1 + \frac{a}{R_0}\right)\left(1 - 2\frac{a}{R_0}\right)} - \chi(s-l)\right\}}{\frac{2R_0}{a} + \pi(s)} ;$$

dans laquelle vous vous bornerez à la substitution $z=\theta_o$, à moins que les valeurs de F′, qui devront être calculées ultérieurement pour l'arc des naissances, n'indiquent que le point de rupture se trouve situé au-dessous du joint de raccordement, ce qui ne peut guères arriver, ou que vous soyez obligé de faire la substitution d'un angle moindre que θ_o, par exemple, $\theta_o-10°$, afin de parvenir à une valeur de F′, plus grande que ses deux voisines.

Quoi qu'il en soit, la substitution $z=\theta_o$ donnera $F(\theta_o)$, et vous calculerez alors, une fois pour toutes, les constantes

$$a_1=a+(R_o-R_1)\left\{2-\chi(\theta_o)\right\},\quad c_1=c-(R_o-R_1)\frac{\chi(\theta_o-i)-\chi(i)}{\cos.i},$$

$$D=2+\frac{a_1}{R_1},\quad E=\frac{2R_1}{a_1},\quad L=\frac{2R_1^2}{a_1},\quad G=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{R_1^2}\right)\left(1+\frac{a+c_1}{R_1}\right),$$

$$\cos.u=\frac{1}{12\cos.i}\left(1+\frac{a}{R_1}\right)^2\left(1-\frac{2a}{R_1}\right),\quad u-i=\varkappa,\ u+i=\lambda,$$

$$K=(R_o-R_1)\sin.\theta_o\left(a+\frac{c+c_1+R_o+R_1}{2}\right)-0{,}00872664\,(R_o^2-R_1^2)\,\theta_o,$$

$$\Phi_1(\theta_o)=L\frac{\chi(\theta_o)\left\{G-\cos.(\theta_o-\lambda)-\cos.(\theta_o+\varkappa)\right\}+\varphi(\theta_o)}{E+\pi(\theta_o)}.$$

$$Q=\chi(90°-\theta_o)-\frac{\left\{D-\chi(\theta_o)\right\}\left\{F(\theta_o)-\Phi_1(\theta_o)\right\}}{K}.$$

Enfin vous substituerez, dans la formule d'essais (*),

$$(4)\quad F'=L\frac{\chi(z)\left\{G-\cos.(z-\lambda)-\cos.(z+\varkappa)\right\}+\varphi(z)}{E+\pi(z)}+K\frac{\chi(90°-z)-Q}{D-\chi(z)},$$

en observant que la table des valeurs de $\chi(z)$, est aussi

(*) Même observation ici que pour la voûte à extrados parallèle

une table de cosinus, servant à calculer $\cos(z-\lambda)$, $\cos(z+\varkappa)$ dont la dernière peut changer de signe. Quant à $\sin.\theta_0$ et $\cos.i$, ils entrent en facteurs ou diviseurs, et c'est de leurs logarithmes qu'on doit se servir.

Tout cela se simplifie beaucoup quand on fait quelques suppositions particulières, comme $i = 0$, ou bien $i = 30°$ et $\theta_0 = 30°$.

On substituera, soit dans l'équation (3), soit dans l'équation (4), de manière à avoir trois résultats équidistans et dont celui du milieu soit le plus grand. Nommons α, 6, γ ces trois valeurs; 6 étant un maximum, on aura toujours, quelle que soit la valeur des intervalles ou accroissemens égaux de z,

$$F = 6 + \frac{(\gamma-\alpha)^2}{8(2\delta-\alpha-\gamma)}$$

Quant à l'angle de rupture, voyez, pour sa détermination, la page 27, ou la note au bas de cette page si ces intervalles, entre les valeurs de z, étaient plus petits que 10.

Calcul de l'épaisseur du piédroit.

Pour calculer l'épaisseur du piédroit, il est nécessaire de remarquer que la hauteur RL (*Fig.* 3), du faîte de la chape, est ordinairement donnée : c'est ce que nous avons appelé n dans les voûtes en plein

---

quand l'intrados est composé de trois arcs de cercle de 60° chacun (*Voy.* la note de la pag. 48), si ce n'est qu'ici on a

$$K = B\nu \times 2{,}73205\left\{a + \frac{c+c_1}{2} - B \times 0{,}04719\right\}.$$

Les autres constantes n'éprouvent pas de simplifications notables. On ne se servira que de la dernière valeur de F', l'angle de rupture ne pouvant se trouver dans l'arc du sommet.

Rien ne serait plus facile que de construire des tables en donnant différentes valeurs à la fraction ν, et en faisant l'ouverture $2B$ égale à l'unité.

cintre ; en conservant cette dénomination, on aura

$$n = A + a + c.$$

La distance horizontale des deux lignes b_1S_1 et RL, étant égale à $B + a \sin.\theta_1$, et la longueur de b_1S_1 étant désignée par n', on a

$$n' = n - a\cos.\theta_1 - (B + a\sin.\theta_1)\tang.i.$$

La surface $b_1S_1LAB_1$ étant désignée par S_1, on a pareillement

S_1=tri. b_1B_1R + tri. ORT + tri. B_1O_1T + trap. b_1S_1LR — — sect. OBA — sect. O_1BB_1,

ou

$$S_1 = \frac{aB\cos.\theta_1}{2} + \frac{(R_0 - A)^2\tang.\theta_0}{2} + \frac{\left\{B - (R_0 - A)\tang.\theta_0\right\}R_1\cos.\theta_1}{2} + \frac{(n'+n)}{2}(B + a\sin.\theta_1) - \frac{\varpi}{360}\left\{\theta_0R_0^2 + \theta_1R_1^2 - \theta_0B_1^2\right\};$$

ce qui se réduit à

$$S_1 = \frac{(n'+n)}{2}(B + a\sin.\theta_1) + \frac{B(R_1 + a)}{2}\cos.\theta_1 + \frac{(R_0 - R_1)(R_0 - A)}{2}\sin.\theta_0 - \frac{\varpi}{360}\left\{\theta_0R_0^2 + \theta_1R_1^2 - \theta_0B_1^2\right\}.$$

Le moment de cette surface autour du point B_1, n'est autre chose que le produit de la distance, de ce point, à l'horizontale px, multipliée par le résultat de la substitution de θ_1, dans F' ; ce moment est donc égal à $F(\theta_1)(A + a)$.

Le moment de la même surface, autour de l'arête extérieure de la base du piédroit, sera égal à son moment autour de B_1, plus cette surface multipliée par l'épaisseur e du piédroit.

Enfin le moment de S_1dXY, autour de cette même

arête, est, à peu-près, $\frac{(e-a)^2 (n' + a\cos.\theta_1)}{2}$; celui de ce piédroit est $\frac{e^2 h}{2}$, la hauteur h étant comptée à partir du point B_1.

De là, on conclut, pour l'équation qui doit donner e,

$$S_1 e + F(\theta_1)(A+a) + (n' + a\cos.\theta_1)\frac{(e-a)^2}{2} + \frac{e^2 h}{2} = \mu F(h + A + a).$$

Cette équation se calculera à l'aide des valeurs de S_1 et n' qu'on vient de poser, et qui se simplifieront quand on fera $\theta_1 = 90°$; ce qui est le cas des naissances horizontales.

La surface S_1, étant divisée par tang.$(\theta_1 - 37°)$, devra donner un résultat plus grand que F, pour que la voûte ne puisse pas glisser sur ses naissances. Toutefois il sera plus exact, avant de faire ce calcul, de joindre, à S_1, la valeur de la surface $S_1 b_1 GY$; laquelle se calculera sur l'épure ou bien par la formule

$$S_1 b_1 GY = \frac{e - a\sin.\theta_1}{2}\left\{n' + n - e\cot.\theta_1 - (B+e)\tang.^2\theta_1\right\}.$$

Si la voûte donnée avait une surcharge, les formules seraient identiquement les mêmes en modifiant seulement les valeurs de n, c, i, comme il a été prescrit pour les voûtes en plein cintre.

Ces derniers calculs, relatifs à l'épaisseur du piédroit, paraîtront longs, mais ils ne se font qu'une fois, et ils se simplifient beaucoup, si, sur l'épure de la voûte, on mesure la longueur n', et si l'on calcule la surface S_1 en lui appliquant une des séries connues d'intégration par approximation, telle que la formule de Simpson, ou bien en considérant cette surface

comme le résultat de l'addition et de la soustraction de plusieurs triangles ou trapèzes et de deux secteurs circulaires. La même épure, en donnant, sans calcul, les valeurs de R_o, R_1, $(R_o - R_1)$, a_1 et c_1, faciliterait beaucoup la recherche propre de la poussée.

Anse de panier à 5 centres, extradossée parallèlement.

Règle pour calculer la poussée.

Les formules relatives aux voûtes à 3 centres, pour être longues dans leurs développemens, n'en sont pas moins ce qu'il y a de plus court et de plus général; elles paraîtront plus simples que celles de M. Audoy, surtout si on suppose, comme lui, le joint des naissances horizontal; elles le paraîtront d'autant plus que l'on fera plus de substitutions pour arriver à la poussée.

Les mêmes moyens peuvent s'appliquer aux voûtes à 5 centres; considérons d'abord les voûtes qui sont extradossées parallèlement.

Les dénominations sont les mêmes qu'à l'article précédent: θ_1 est l'inclinaison du second joint de raccordement, θ_2 celle du joint des naissances. Voici la règle à suivre.

Traitez la voûte comme si elle était à trois centres, en faisant tout ce qui est prescrit à la page 47; seulement, comme il est certain que le point de rupture n'est pas dans l'arc du sommet, ne faites aucun essai dans l'équation (1) de cette page. Mais substituez-y, de suite, $z=\theta_o$, vous aurez $F(\theta_o)$. Pareillement, dans l'équation (2) de la page suivante, vous ferez d'abord la seule substitution $z=\theta_1$, ce qui vous donnera $F(\theta_1)$; puis vous calculerez les constantes :

$$a_2 = a_1 + (R_1 - R_2)\left\{2 - \chi(\theta_1)\right\}, \quad D' = 2 + \frac{a_2}{R_2}, \quad E' = \frac{2R_2}{a_2},$$

$$L' = \frac{2a\,R_2\,(2\,R_2 + a)}{a_2}, \quad G' = -\frac{(R_2 + a)^2}{3\,R_2(2R_2 + a)},$$

$$\Phi_2'(\theta_1) = L'\frac{G' - \varphi(\theta_1)}{E' + \pi(\theta_1)}, \quad K' = K + \frac{a\,\pi\,\theta_1\,(R_1 - R_2)}{180},$$

$$Q' = \frac{\left\{F(\theta_1) - \Phi_2(\theta_1)\right\}\left\{D - \chi(\theta_1)\right\}}{K'} - \chi(90^\circ - \theta_1).$$

Ces constantes, substituées dans la formule d'essais, donneront

$$F' = L'\frac{G' - \varphi(z)}{E' + \pi(z)} + K'\frac{Q' + \chi(90^\circ - z)}{D' - \chi(z)}.$$

La poussée se calculera à l'aide de cette expression et de la formule (2) de la page 48. Ici, peut-être, à cause de la plus grande courbure de l'arc des naissances, les formules de fausse-position, de la pag. 27, ne seraient pas assez exactes ; on fera donc des substitutions distantes de 5°, dans l'arc intermédiaire, et de 10°, dans l'arc des naissances ; on arrivera alors à trois valeurs consécutives α, 6, γ telles que 6 sera la plus grande. Or, si elles appartiennent, toutes trois, à l'arc des naissances, on aura $F = 6 + \frac{(\gamma - \alpha)^2}{8(26 - \alpha - \gamma)}$, et l'angle de rupture comme à la pag. 27 ; si elles appartiennent à l'arc intermédiaire, la valeur de F restera la même fonction de α, 6, γ, mais celle de z deviendra $z = z' + \frac{5(\gamma - \alpha)}{2(26 - \alpha - \gamma)}$. Enfin, si α est dans l'arc intermédiaire, γ dans l'arc des naissances, 6 à leur jonction, on aura

$$z=\theta_1+\frac{5}{2}\cdot\frac{36+\gamma-4\alpha}{36-\gamma-2\alpha},\quad F=F(\theta_1)+\frac{(36+\gamma-4\alpha)^2}{24(36-\gamma-2\alpha)};$$

formules dans lesquelles z' n'est autre chose que θ_1 et $6=F(\theta_1)$, et dont la démonstration est exactement la même que celle des équations de la pag. 27.

Calcul de l'épaisseur du piédroit.

La surface entière du demi-profil de la voûte étant désignée par S_2, sa valeur est

$$S_2=\frac{a\varpi}{180}\left\{R_2(\theta_2-\theta_1)+R_1(\theta_1-\theta_0)+R_0\theta_0+\frac{a}{2}\theta_2\right\},$$

et l'équation qui donne l'épaisseur du piédroit est celle-ci :

$$e^2+2e\frac{S_2}{h}=2\mu F+\frac{2\left\{\mu F-F(\theta_2)\right\}(A+a)}{h}.$$

Anse de panier à cinq centres, extradossée de niveau ou en chape.

Règle pour calculer la poussée.

Quand la voûte, à cinq centres, est recouverte d'une chape dont le plan supérieur est horizontal ou incliné d'un angle i sur l'horizon (*Fig.* 4), il faut suivre cette règle.

Traitez la voûte comme si elle était à trois centres, vous arriverez à l'équation (4) de la pag. 52 ; vous y substituerez $z=\theta_1$, et vous aurez $F(\theta_1)$; après quoi, vous calculerez ces nouvelles constantes :

$$a_2=a_1+(R_1-R_0)\left\{2-\chi(\theta_1)\right\},\ c_2=c_1-(R_1-R_2)\frac{\chi(\theta_1-i)-\chi(i)}{\cos.i},$$

$$D'=2+\frac{a_2}{R_0},\ E'=\frac{2R_2}{a_2}=L',\ G'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a^2}{R_2^2}\right)\left(1+\frac{a+c_2}{R_2}\right),$$

$$\cos.u'=\frac{1}{12\cos.i}\left(1+\frac{a}{R_2}\right)^2\left(1-2\frac{a}{R_2}\right),\ u'-i=\varkappa',\ u'+i=\lambda',$$

$$\ldots K' = K + \text{Surf. } H_1HL_1L_2, \qquad (*)$$

$$\varphi_2(\theta_1) = L' \frac{\chi(\theta_1)\left\{G' - \cos.(\theta_1 - \lambda') - \cos.(\theta_1 + \varkappa')\right\} + \varphi(\theta_1)}{E' + \varkappa(\theta_1)}.$$

$$Q' = \chi(90^\circ - \theta_1) - \frac{\left\{D' - \chi(\theta_1)\right\}\left\{F(\theta_1) - \varphi_2(\theta_1)\right\}}{K'}.$$

La valeur de R', telle que nous la donnons, est facile à calculer; car l'aire du trapèze mixtiligne $H_1HL_1L_2$, compris entre les deux verticales qui passent par les centres O_1 et O_2 des arcs intermédiaires et des naissances, cette aire peut être évaluée à l'aide des formules connues d'interpolation, dont la plus simple revient à mener une ligne uv à égale distance de H_1L_2 et HL_1; à la mesurer sur l'épure avec précision, à mesurer de même l'abscisse tz, et à substituer dans l'équation

$$\text{Surf. } H_1HL_1L_2 = \frac{(H_1L_2 + 2uv + HL)}{3} \times tz.$$

Le calcul de toutes ces constantes se simplifiera évidemment beaucoup à l'aide de l'épure qu'il faudra exécuter pour tracer la voûte, et dont il coûtera si

---

(*) Pour trouver cette valeur K', il faut se rappeler que $K' = S_1 - s_1 = B_1S_1LA - B_1L_1L_2A_2$; ce qui équivaut à $H_1L_2LA - B_1H_1A_2$. Or la surface $B_1H_1A_2$ diffère très-peu de BHA_2; toutes deux sont fort petites et pourraient même être négligées; on peut donc prendre l'une pour l'autre sans erreur sensible. D'ailleurs K ou $S_0 - s_0$ a une valeur semblable; savoir: $HL_1LA - BA_1H$; en prenant donc la différence entre K' et K, on trouvera, à très-peu près, $H_1HL_1L_2$.

Dans le cas présent des voûtes à cinq centres, la constante K, elle-même, aurait pu être remplacée par la surface AHL_1L, qu'on évaluerait comme $H_1HL_1L_2$; mais on ne pourrait pas, sans erreur notable, employer ce moyen de calcul pour R, si la voûte n'avait que trois centres.

peu de se servir; on déterminera donc, sans opérations numériques, les longueurs=R_0, R_1, R_2, R_0-R_1, R_1-R_2, a_1, a_2, c_1 et c_2.

Enfin on substituera dans la formule suivante

$$F'=L'\frac{\chi(z)\left\{G'-\cos.(z-\lambda')-\cos.(z+\omega')\right\}+\varphi(z)}{E'+\pi(z)}+K'\frac{\chi(90°-z)-Q'}{D'-\chi(z)},$$

qui, jointe à l'expression (4) de la page 52, donnera, par quelques substitutions, la poussée qu'on cherche.

On se servira d'ailleurs des formules d'approximation données à l'article des voûtes, en anse de panier, extradossées parallèlement, en faisant trois ou quatre substitutions.

Calcul de l'épaisseur du piédroit.

L'évaluation de la surface S_2 du demi-profil $B_2b_2S_2LA$ se fera sur l'épure, ainsi qu'il a été dit page 55, à l'occasion des voûtes à trois centres. La valeur de b_2S_2, désignée au même article par n', sera

$$n'=n-a\cos.\theta_2-(B+a\sin.\theta_2)\,\text{tang.}\,i;$$

ce qui se simplifiera quand les naissances seront horizontales, puisque alors $\theta_2=90°$.

On calculera $F(\theta_2)$, et l'épaisseur du piédroit sera la racine de l'équation

$$S_2e+F(\theta_2)(A+a)+\frac{(e-a)^2(n'+a\cos.\theta_2)}{2}+\frac{e^2h}{2}=\mu F(h+A+a),$$

dans laquelle on fera $\mu=1,9$.

On divisera S_2 par tang. $(\theta_1-37°)$, et le résultat devra être plus grand que F, pour que la voûte ne puisse pas glisser, sur ses naissances, par l'effet de la poussée : ici, comme dans la voûte à trois centres, S_2 devra préalablement être augmentée de la surface b_2S_2YG, calculée approximativement sur l'épure.

§ VI.

VOÛTES A INTRADOS DE FORME QUELCONQUE.

Méthode générale.

Si, au lieu d'une voûte dont l'intrados est composé d'un petit nombre d'arcs de cercle, on en a une d'une courbure quelconque, il faut employer la même méthode en l'appliquant à des accroissemens infiniment petits. Ainsi, en désignant par N, la valeur du moment d'un voussoir quelconque de la voûte donnée, autour de son arête d'intrados inférieure; par n le moment du voussoir de la voûte, en plein cintre, dont la douelle serait osculatrice à la proposée, suivant cette même arête d'intrados; enfin, si S est la surface du premier voussoir, s celle du second; que N_1 et n_1 soient les momens, pris dans la voûte donnée et dans la voûte osculatrice, de deux voussoirs un peu plus grands que les premiers, l'équation, en toutes lettres, de la page 45, deviendra, en remplaçant BD (*Fig.* 3) par la lettre γ,

$$N_1 - N = n_1 - n + (S - s)\gamma.$$

Si ρ est le rayon de courbure et qu'on passe aux infiniment petits, γ devient $\rho\, d\sin.z = \rho\cos.z\, dz$, et l'équation se change en

$$\frac{dN}{dz}dz = \frac{dn}{dz}dz + (S - s)\,\rho\cos.z\, dz,$$

ou, en intégrant,

$$N = n + \int_0^z (S - s)\,\rho\cos.z\, dz.$$

Ainsi, le moment de rotation autour d'un point de l'intrados, est égal au moment de rotation du voussoir fictif de la voûte, en plein cintre, osculatrice à

la voûte donnée en ce même point, augmenté de l'intégrale

$$\int_0^z (S - s)\rho \cos.z \, dz ;$$

dans laquelle z est l'inclinaison, sur la verticale, du joint qui passe par le point dont il est question, S et s sont les surfaces des deux voussoirs qui complètent, en allant vers la clef, soit la demi-voûte donnée, soit la demi-voûte osculatrice.

Nous n'entrerons pas dans de plus grands développemens sur cette méthode, parce qu'on aura rarement occasion de l'employer dans la pratique, et qu'elle obligerait, pour la plupart des cas, à recourir aux séries servant à intégrer par approximation. L'ellipse offrirait, il est vrai, un exemple facile de l'application de ces calculs ; mais, ainsi qu'on va le voir, la méthode ordinaire, prescrite dans les élémens de mécanique pour évaluer les momens, suffit et conduit à des résultats assez simples pour que les voûtes elliptiques ne soient pas plus difficiles à calculer que celles dont l'intrados est une demi-circonférence ou un arc de cercle.

Voûte elliptique dont l'extrados est de niveau.

Formule fondamentale.

Soit (*Fig.* 5) une voûte elliptique (*) extradossée de niveau, ayant une épaisseur égale à a, recouverte d'une charge de maçonnerie dont la hauteur, au-dessus de la clef, est c. Si B et A sont les deux demi-dia-

(*) *Voy.*, dans les *Annales des ponts et chaussées*, tom. VIII, p. 97, année 1834, une *Note* de M. de Prony, qui se rapporte au tracé des voûtes elliptiques, etc.

mètres de la courbe, le premier étant la demi-ouverture, le second la montée sous clef de la voûte, on a, pour l'équation de l'intrados, $B^2y^2+A^2x^2=A^2B^2$.

Soient x' et y' les coordonnées du point particulier m, on aura, pour calculer le moment d'un voussoir $Amuvs$, autour du point m,

$$M^1.Amuvs = M^1.mrsA - M^1.muvr,$$

$$M^1.mrsA = \int_0^{x'} (x'-x)(A+a+c-y)dx;$$

ou, en remplaçant y par sa valeur $y=\frac{A}{B}\sqrt{B^2-x^2}$,

$$M^1.mrsA = \frac{A}{B}\int_0^{x'} (x'-x)\left\{B\left(1+\frac{a+c}{A}\right)-\sqrt{B^2-x^2}\right\}dx.$$

Imaginez que, prenant OA=B, vous décriviez un arc de cercle qui serait l'intrados d'une voûte, en plein cintre, ayant a pour épaisseur, et dont la charge serait $\frac{B(c+a)}{A}-a$, charge que j'appellerai c'.

Considérez le point n qui a la même abscisse que m; le moment de rotation du trapèze mixtiligne qui, dans cette voûte en plein cintre, représente $mrsA$, sera donné par l'intégrale

$$\int_0^{x'} (x'-x)\left\{B\left(1+\frac{a+c}{A}\right)-\sqrt{B^2-x^2}\right\}dx.$$

Cette intégrale ne différant pas de celle qui précède, le premier des deux momens est égal au produit du second par $\frac{A}{B}$.

Passant au calcul du moment du trapèze rectiligne $muvr$, je suppose que les joints mu, de la voûte, ne sont pas normaux à l'intrados, mais parallèles aux

joints nO de la voûte, en plein cintre, que nous considérons de pair avec la proposée. Soit z l'angle en O, vous trouverez facilement

$$M^t.muvr = a^2 \sin.^2 z \left\{ \frac{A+a+c-y}{2} - \frac{a\cos.z}{3} \right\};$$

expression qui suppose que mu diffère assez peu de a, pour qu'on puisse remplacer l'une par l'autre, comme cela est évident; y doit être remplacé par sa valeur tirée de l'équation de la courbe d'intrados: si c'est l'ellipse,

$$M^t.muvr = a^2 \sin.^2 z \left\{ \frac{A+a+c-\frac{A}{B}\sqrt{B^2-x^2}}{2} - \frac{a\cos.z}{3} \right\};$$

si c'est le cercle rapporté à son centre O, le moment du trapèze correspondant à $muvr$, est

$$a^2 \sin.^2 z \left\{ \frac{B\left(1+\frac{a+c}{A}\right)-\sqrt{B^2-x^2}}{2} - \frac{a\cos.z}{3} \right\}.$$

De là on conclut finalement

$$M^t.Amuvs = \frac{A}{B}\left\{ \int_0^{x'} (x'-x)\left\{ B\left(1+\frac{a+c}{A}\right)-\sqrt{B^2-x^2} \right\} dx - \right.$$

$$\left. -a^2 \sin.^2 z \left\{ \frac{B\left(1+\frac{a+c}{A}\right)-\sqrt{B^2-x^2}}{2} - \frac{a\cos.z}{3} \right\} + \frac{(B-A)}{A}\frac{a^3\cos.z\sin.^2 z}{3} \right|.$$

Le bras de levier mt, de la poussée, a pour expression

$$mt = A+a-\frac{A}{B}\sqrt{B^2-x^2} = A(1-\cos.z)+a,$$

attendu que $\sqrt{B^2-x^2}$ n'est autre chose que B cos.z.

Divisant le moment de A$muvs$ par mt, et comparant

l'expression qui en résulte avec la valeur de F′, dans la voûte, en plein cintre, de rayon B, d'épaisseur a et dont la charge est c', on trouve

$$F'=\frac{2B^2A}{a}\times\frac{\frac{(B+a)^2(B-2a)}{6B^3}\psi(z)+\frac{B+a}{2B^2}\left\{c'(B-a)+a(B+\alpha)\right\}\chi(z)}{\frac{2A}{a}+\pi(z)}+$$

$$+\frac{2B^2A}{a}\times\frac{\varphi(z)+\frac{(B-A)}{3A}\frac{a^3}{B^3}\cos.z(1+\cos.\varepsilon)}{\frac{2A}{a}+\pi(z)},$$

mais, de l'identité $(1+\cos.z)(3-\cos.z)=\psi(z)$, on déduit

$$\cos.z(1+\cos.z)=3\chi(z)-\psi(z);$$

ce qui permet de simplifier encore plus l'expression de F′, qui devient, après avoir remplacé c' par sa valeur,

$$F'=\frac{2B^2A}{a}\times\frac{\left\{\frac{1}{6}-\frac{a^2}{B^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{3A}\right)\right\}\psi(z)}{\pi(z)+\frac{2A}{a}}+$$

$$+\frac{2B^2A}{a}\times\frac{\left\{\frac{a^2}{B^2}+\frac{a}{2A}\left(1+\frac{a^2}{B^2}\right)+\frac{c}{2A}\left(1-\frac{a^2}{B^2}\right)\right\}\chi(z)+\varphi(z)}{\pi(z)+\frac{2A}{a}}.$$

Cette expression est la même, aux constantes près, que celle que nous avons donnée pour les voûtes en plein cintre. On aura donc, pour calculer la valeur de la poussée,

Règle approximative pour calculer la poussée.

$$G=\frac{1}{6}-\frac{a^2}{B^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{a}{3A}\right),\quad M=\frac{a^2}{B^2}+\frac{a}{2A}\left(1+\frac{a^2}{B^2}\right)+\frac{c}{2A}\left(1-\frac{a^2}{B^2}\right),$$

$$F'=\frac{2B^2A}{a}\times\frac{G\psi(z)+M\chi(z)+\varphi(z)}{\pi(z)+\frac{2A}{a}}.$$

Ce résultat, remarquable par sa simplicité, est

fondé sur une hypothèse qui, à la vérité, est inexacte; car les joints sont normaux, à la douelle, suivant la direction mu', et n'ont pas la direction oblique mu. L'erreur consiste donc à substituer le moment de $muvr$ à celui de $mu'v'r$. Déjà même, elle est un peu compensée par l'introduction de a à la place de mu.

Cette substitution revient à l'hypothèse d'un joint de rupture, dans la maçonnerie qui couvre le bandeau, dirigé, non suivant la verticale, mais suivant une ligne $u'x$ comprise entre cette verticale et le prolongement de mu'. Or cette direction a peut-être plus de probabilité que celle qui est verticale; et, dans une question de ce genre, on ne doit pas s'arrêter à l'avantage qu'offre cette dernière, de conduire à une poussée un peu plus forte, dès que l'autre amène avec elle une solution bien moins compliquée, et qui ne peut s'écarter sensiblement de la véritable.

Formule rigoureuse et générale.

Néanmoins, nous croyons devoir faire remarquer que cette dernière solution est tout aussi remarquable que la solution approchée, non quant à la commodité des applications, mais par ses conséquences. En effet, on a, d'après ce qu'on a vu ci-dessus, et en désignant $A+a+c$ par n, ainsi qu'on l'a fait dans le cours de ce mémoire,

$$M'.Amurs = \int_0^{u'} (x'-x)(n-y)dx =$$

$$= \frac{nB^2 \sin.^2 z}{2} - A^2B\left\{\frac{\cos.z \sin.^2 z}{2} + \frac{z \sin.z}{2} + \frac{\cos.^3 z - 1}{3}\right\},$$

d'où l'on tire

$$F' = \frac{2B^2A}{a} \times \frac{\varphi(z) + \frac{1}{6}\psi(z) + \frac{a+c}{2A}\chi(z) - M'.mu'v'r}{\pi(z) + \frac{2A}{a}}.$$

D'un autre côté, on a

$$M^{t}.\,mu'\nu'r=a^{2}\sin^{2}\alpha\left\{\frac{A+a+c-A\cos.z}{2}-\frac{a\cos.\alpha}{3}\right\},$$

ou, si l'on suppose, pour plus de généralité, que l'épaisseur de la voûte soit variable en chaque point, et qu'étant a au sommet, elle soit λ au point m,

$$M^{t}.\,mu'\nu'r=\lambda^{2}\sin.^{2}\alpha\left\{\frac{A+a+c-A\cos.z}{2}-\frac{\lambda\cos.\alpha}{3}\right\}.$$

D'ailleurs, si l'on appelle ν la longueur mp de la normale, l'équation de l'ellipse donne

$$\nu=\frac{A}{B}\sqrt{B^{2}\cos.^{2}z+A^{2}\sin.^{2}z},\quad\text{ou bien}\quad\nu=A\frac{\cos.z}{\cos.\alpha};$$

donc $\cos.\alpha=\dfrac{A\cos.z}{\nu}$, et $\sin.\alpha=\dfrac{A^{2}}{B\nu}\sin.z$;

ce qui permet finalement de donner à F', la forme suivante :

$$F'=\frac{2B^{2}A}{a}\times\frac{\varphi(z)+\left\{\frac{1}{6}-\frac{A^{4}}{2B^{4}}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{2}-\frac{A^{4}}{3B^{4}}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{3}\right\}\psi(z)}{\pi(z)+\frac{2A}{a}}+$$

$$+\frac{2B^{2}A}{a}\times\frac{\left\{\frac{a+c}{2A}+\frac{A^{3}(2A-a-c)}{2B^{4}}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{2}+\frac{A^{4}}{B^{4}}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{3}\right\}\chi(z)}{\pi(z)+\frac{2A}{a}}.$$

Voûte à épaisseur variable, avec surcharge, dans laquelle les joints se replient verticalement, etc.

En général, λ sera une fonction de z, donnée par l'équation de la courbe-extrados; mais, au cas présent, λ est constant et égal à a. Quand il s'agira d'une voûte dont tous les voussoirs n'auront pas la même longueur, il sera, le plus souvent, préférable de mesurer λ sur l'épure. Il en sera de même de ν, à moins que la douelle ne soit un plein cintre : alors ν est constant et égal à

R. En posant $\lambda = \frac{R+a}{\cos.z} - R$, $\nu = B = A = R$, on trouverait la formule qui convient à une voûte en plein cintre, extradossée de niveau, et dont les voussoirs sont prolongés jusqu'à l'extrados; et, si l'on faisait $\lambda = \frac{n\cos.i}{\cos.(z-i)} - R$, on obtiendrait celle qui convient à une voûte en plein cintre, recouverte d'une chape, en maçonnerie, surmontée d'une charge de terre limitée à un plan de niveau: ici le joint est supposé ne se replier verticalement qu'en quittant la chape, et c'est le cas que nous avons négligé de traiter, à l'article des voûtes en plein cintre, à cause de sa complication.

On ne doit point regarder cette valeur générale de F′ comme non susceptible d'applications; car nous avons vu que trois ou quatre substitutions peuvent suffire.

Voûte elliptique extradossée en chape.

Formules et règle pour calculer la poussée.

Cette voûte peut se traiter facilement à l'aide de la formule propre à la voûte extradossée de niveau: il suffit, en effet, de retrancher le moment du triangle Sru'' (*Fig.* 6), divisé par mt, de l'expression de F′ trouvée en premier lieu.

Or $Sr = (B+a)\sin.z$, $ru'' = (B+a)\sin.z\,\text{tang.}i$; donc

$$M^t.\,Sru'' = \frac{1}{2}(B+a)^2\sin.^2z\,\text{tang.}i\left\{\frac{1}{3}(B+a)\sin.z - a\sin.z\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}(B+a)^2(B-2a)\sin.^3z\,\text{tang.}i,$$

et ce moment, divisé par $A(1-\cos.z)+a = mt$, donne

$$\frac{2B^2A}{a}\cdot\frac{(B+z)^2(B-2a)\,\text{tang.}\,i\,\text{sin.}\,z\,\chi(z)}{6B^2A\left(\pi(z)+\frac{2A}{a}\right)}=$$

$$=\frac{2B^2A}{a}\cdot\frac{\frac{B^3-3a^2B-2a^3}{6B^2A}\,\text{tang.}\,i\,\text{sin.}\,z\,\chi(z)}{\pi(z)+\frac{2A}{a}},$$

Retranchant donc cette expression de la valeur de F', calculée comme si la voûte était extradossée de niveau et portait une surcharge d'épaisseur c, on en déduit facilement la règle suivante. Calculez les constantes G, x et λ par le moyen des formules

$$\text{tang.}I=\frac{B^3-3a^2B-2a^3}{AB^2-3a^2A-2a^3}\text{tang.}\,i,\quad \text{cos.}\,u=\frac{AB^2-3a^2A-2a^3}{12AB^2\,\text{cos.}I},$$

$$G=\frac{n}{2A}\left(1-\frac{a^2}{B^2}\right),\quad x=u-I,\quad \lambda=u+I;$$

puis substituez dans l'équation

$$F'=\frac{2B^2A}{a}+\frac{\varphi(z)+\chi(z)\left\{G-\text{cos.}(z-\lambda)-\text{cos.}(z+x)\right\}}{\pi(z)+\frac{2A}{a}},$$

qui fera connaître la valeur de la poussée, en observant qu'ici, comme dans la méthode exposée pages 31 et 32, la quantité $\text{cos.}(z+x)$ devra être prise avec son signe; ce qui la rendra tantôt additive et tantôt soustractive. On fera d'ailleurs des substitutions distantes entre elles de 10° ou de 5°, et, quand on en aura obtenu trois valeurs consécutives α, 6 et γ, telles que 6 soit la plus grande, on posera $F=6+\frac{(\gamma-\alpha)^2}{8(2\,6-\alpha-\gamma)}$, z sera donné par la formule indiquée dans la note des pages 27 et 28.

Calcul de l'épaisseur du piédroit.

Il est inutile de donner l'équation qui doit fournir l'épaisseur du piédroit; la surface de l'ellipse ayant l'expression connue $\varpi A.B$, il suffit de faire remarquer qu'ici comme dans toutes les voûtes, à naissances horizontales, traitées jusqu'à présent, le moment de la demi-voûte autour de l'arête extérieure du piédroit, est égal à la quantité

$$(e-a)^2\frac{n-(B+a)\,\text{tang.}\,i}{2}+(A+a)\,F(90^\circ)+S\grave{e};$$

S, étant la surface de cette demi-voûte limitée à la verticale tangente à l'extrados du bandeau, et $F(90^\circ)$ le résultat de la substitution, dans F', de l'angle 90°, que les naissances font avec la verticale.

Connaissant la surface S, on la multipliera par la tangente de 37°., ou 0,76, et le résultat devra être plus grand que la poussée, pour qu'il n'y ait pas glissement sur les naissances.

OBSERVATION GÉNÉRALE.

La notation se trouve répartie dans toute l'étendue de ce mémoire; cependant on la trouvera, presque toute entière, aux pages 11 et 12, pour les voûtes en plein cintre; à la page 41 et suivantes, pour les voûtes en anse de panier; aux pages 37 et 38 pour ce qui concerne l'épaisseur des piédroits. Quant aux fonctions $\downarrow(s)$, $\chi(s)$, etc., il suffira de les considérer comme de simples argumens ayant, pour chaque angle du quadran, les valeurs inscrites à la table ci-jointe et définies par ces équations :

$$\chi(s)=1+\cos.s,\quad \downarrow(s)=(1+\cos.s)(3-\cos.s),$$

$$\varphi(s)=\frac{1}{3}-\frac{s}{2\,\text{tang.}\frac{1}{2}s},\quad \pi(s)=\text{cosec.}^2\tfrac{1}{2}s.$$

TABLE des quatre fonctions de (z), *qui servent à calculer la poussée des voûtes en berceau.*

z^{o}	$\chi(z)$	LOG.$\chi(z)$	$\downarrow(z)$	LOG.$\downarrow(z)$	$\varphi(z)$	$\pi(z)$
0	1.00000	0.000000	4.00000	0.602060	$\bar{1}$.333333	Infini.
1	1.99985	0.300097	4.00000	0.602060	$\bar{1}$.333360	13131.550
2	1.99939	0.300898	4.00000	0.602060	$\bar{1}$.333438	3283.138
3	1.99863	0.300732	4.00000	0.602060	$\bar{1}$.333566	1459.358
4	1.99756	0.300501	4.00000	0.602060	$\bar{1}$.333743	821.088
5	1.99620	0.300203	3.99999	0.602059	$\bar{1}$.333971	525.585
6	1.99452	0.299839	3.99998	0.602057	$\bar{1}$.334250	365.090
7	1.99255	0.299408	3.99995	0.602054	$\bar{1}$.334581	268.318
8	1.99027	0.298912	3.99990	0.602050	$\bar{1}$.334961	205.509
9	1.98769	0.298348	3.99985	0.602043	$\bar{1}$.335393	162.448
10	1.98481	0.297719	3.99978	0.602035	$\bar{1}$.335877	131.646
11	1.98163	0.297022	3.99966	0.602023	$\bar{1}$.336410	108.856
12	1.97815	0.296257	3.99951	0.602006	$\bar{1}$.336995	91.5230
13	1.97437	0.295429	3.99934	0.601989	$\bar{1}$.337631	78.0337
14	1.97030	0.294531	3.99912	0.601964	$\bar{1}$.338318	67.3303
15	1.96593	0.293567	3.99884	0.601934	$\bar{1}$.339054	58.6954
16	1.96126	0.292536	3.99850	0.601897	$\bar{1}$.339845	51.6284
17	1.95631	0.291436	3.99808	0.601852	$\bar{1}$.340683	45.7715
18	1.95106	0.290270	3.99761	0.601800	$\bar{1}$.341574	40.8634
19	1.94552	0.289035	3.99703	0.601737	$\bar{1}$.342518	36.7097
20	1.93969	0.287733	3.99637	0.601665	$\bar{1}$.343511	33.1634
21	1.93358	0.286363	3.99560	0.601852	$\bar{1}$.344556	30.1115
22	1.92718	0.284923	3.99470	0.601484	$\bar{1}$.345651	27.4664
23	1.92051	0.283415	3.99368	0.601373	$\bar{1}$.346802	25.1587
24	1.91355	0.281839	3.99253	0.601248	$\bar{1}$.348002	23.1335
25	1.90631	0.280193	3.99123	0.601106	$\bar{1}$.349251	21.3465
26	1.89879	0.278478	3.98977	0.600947	$\bar{1}$.350556	19.7617
27	1.89100	0.276692	3.98813	0.600769	$\bar{1}$.351911	18.3497
28	1.88295	0.274838	3.98636	0.600570	$\bar{1}$.353316	17.0843
29	1.87462	0.272913	3.98428	0.600350	$\bar{1}$.354776	15.9515
30	1.86603	0.270918	3.98206	0.600107	$\bar{1}$.356288	14.9282
31	1.85717	0.268851	3.97960	0.599839	$\bar{1}$.357848	14.0023
32	1.84804	0.266713	3.97691	0.599546	$\bar{1}$.359464	13.1620
33	1.83867	0.264504	3.97397	0.599228	$\bar{1}$.361133	12.3970
34	1.82904	0.262223	3.97077	0.598875	$\bar{1}$.362853	11.6985
35	1.81915	0.259869	3.96730	0.598494	$\bar{1}$.364626	11.0590
36	1.80902	0.257443	3.96353	0.598082	$\bar{1}$.366451	10.4722
37	1.79864	0.254943	3.95946	0.597635	1.368331	9.93223
38	1.78801	0.252370	3.95506	0.597153	$\bar{1}$.370263	9.43443
39	1.77715	0.249723	3.95033	0.596634	$\bar{1}$.372246	8.97450
40	1.76604	0.247001	3.94526	0.596076	$\bar{1}$.374287	8.54863
41	1.75471	0.244205	3.93984	0.595478	$\bar{1}$.376378	8.15860
42	1.74314	0.241333	3.93403	0.594837	$\bar{1}$.378520	7.78850
43	1.73135	0.238386	3.92783	0.594152	$\bar{1}$.380722	7.44471
44	1.71934	0.235368	3.92123	0.593422	$\bar{1}$.382971	7.12607
45	1.70711	0.232261	3.91420	0.592643	$\bar{1}$.385274	6.82843

Suite de la Table des quatre fonctions de (z).

z°	$\chi(z)$	LOG. $\chi(z)$	$\downarrow(z)$	LOG. $\downarrow(z)$	$\varphi(z)$	$\pi(z)$
45	1.70711	0.232261	3.91420	0.592643	$\bar{1}$.385274	6.82843
46	1.69466	0.229082	3.90677	0.591817	$\bar{1}$.387633	6.55003
47	1.68200	0.225826	3.89887	0.590939	$\bar{1}$.390049	6.28927
48	1.66913	0.222490	3.89053	0.590007	$\bar{1}$.392518	6.04468
49	1.65606	0.219076	3.88170	0.589023	$\bar{1}$.395042	5 8[illegible]96
50	1.64279	0.215582	3.87240	0.587980	$\bar{1}$.397617	5.59890
51	1.62932	0.212006	3.86259	0.586878	1.400250	5.39550
52	1.61566	0.208350	3.85228	0.585712	$\bar{1}$.402939	5.20374
53	1.60181	0.204611	3.84145	0.584496	$\bar{1}$.405678	5.02287
54	1.58778	0.200792	3.83008	0.583208	$\bar{1}$.408477	4.85183
55	1.57358	0.196887	3.81816	0.581854	$\bar{1}$.411331	4.69017
56	1.55919	0.192900	3.80569	0.580433	$\bar{1}$.414238	4.53713
57	1.54464	0.188827	3.79265	0.578942	$\bar{1}$.417203	4.39211
58	1.52992	0.184668	3.77902	0.577380	$\bar{1}$.420225	4.25458
59	1.51504	0.180423	3.76481	0.575743	$\bar{1}$.423302	4.12403
60	1.50000	0.176091	3.75000	0.574031	1.426433	4.00000
61	1.48481	0.171671	3.73458	0.572242	$\bar{1}$.429625	3.88206
62	1.46947	0.167161	3.71854	0.570372	$\bar{1}$.432873	3.76982
63	1.45399	0.162561	3.70187	0.568422	$\bar{1}$.436177	3.66293
64	1.43837	0.158173	3.68457	0.566387	$\bar{1}$.439539	3.56107
65	1.42262	0.153088	3.66663	0.564267	$\bar{1}$.442961	3.46391
66	1.40674	0.148213	3.64804	0.562059	$\bar{1}$.446436	3.37118
67	1.39073	0.143243	3.62879	0.559762	$\bar{1}$.449973	3.28261
68	1.37461	0.138179	3.60883	0.557366	$\bar{1}$.453565	3.19798
69	1.35837	0.133018	3.58831	0.554890	$\bar{1}$.457217	3.11705
70	1.34202	0.128082	3.56706	0.552311	$\bar{1}$.460931	3.03960
71	1.32557	0.122402	3.54514	0.549633	$\bar{1}$.464701	2.96545
72	1.30902	0.116946	3.52254	0.546856	$\bar{1}$.468530	2.89442
73	1.29237	0.111387	3.49926	0.543976	$\bar{1}$.472419	2.82634
74	1.27564	0.105737	3.47530	0.540992	$\bar{1}$.476365	2.76104
75	1.25882	0.099964	3.45066	0.537902	$\bar{1}$.480377	2.69839
76	1.24192	0.094094	3.42532	0.534701	$\bar{1}$.484445	2.63825
77	1 22495	0.088118	3.39930	0.531389	$\bar{1}$.488575	2.58048
78	1.20791	0.082035	3.37260	0.527964	$\bar{1}$.492767	2.52497
79	1.19081	0.075843	3.34521	0.524424	$\bar{1}$.497021	2.47160
80	1.17365	0.069538	3.31714	0.520764	$\bar{1}$.501339	2.42028
81	1.15643	0.063119	3.28839	0.516983	$\bar{1}$.505711	2.37089
82	1.13917	0.056588	3.25897	0.513080	$\bar{1}$.510148	2.32335
83	1.12187	0.049942	3.22888	0.509052	$\bar{1}$.514653	2.27756
84	1.10453	0.043178	3.19814	0.504897	$\bar{1}$.519213	2.23346
85	1.08716	0.036293	3.16672	0.500610	$\bar{1}$.523841	2.19095
86	1.06976	0.029285	3.13464	0.496187	$\bar{1}$.528533	2.14997
87	1.05234	0.022155	3.10192	0.491631	$\bar{1}$.533287	2.11045
88	1.03490	0.014898	3.06857	0.486936	$\bar{1}$.538104	2.07232
89	1.01745	0.007513	3.03460	0.482100	$\bar{1}$.542990	2.03552
90	1.00000	0.000000	3.00000	0.477121	$\bar{1}$.547937	2.00000

MÉMOIRE

SUR LE CALCUL

DES

VOÛTES CIRCULAIRES;

Par M. PETIT, Capitaine du génie, Aide-de-camp de M. le Lieutenant-général Rohault de Fleury.

§ Ier.

INTRODUCTION.

Notre but, dans ce mémoire, n'est pas de traiter de la théorie générale et analytique des voûtes, qui, depuis les travaux de MM. Audoy, Navier et Persy, peut être regardée comme complète; mais d'en simplifier et d'en faciliter les applications qui sont considérées, à juste titre, comme extrêmement difficiles à cause des calculs longs et rebutans qu'elles exigent. Nous rappellerons, en peu de mots, les bases de cette théorie, en nous limitant à ce qui est nécessaire pour bien faire saisir l'état de la question pratique.

Les voûtes à considérer étant toutes cylindriques, on n'a besoin de s'occuper que de ce qui se rapporte à leurs profils; ce qui revient à leur supposer une lon-

gueur égale à l'unité linéaire, le *mètre*. Pour passer, de là, aux poids et forces effectives, il ne s'agira que de multiplier les nombres qui représentent les profils, par 2250 kil., poids moyen du mètre cube de maçonnerie ordinaire de moellons; mais cela n'est utile que dans le cas où il s'agit d'évaluer les pressions auxquelles sont soumis les matériaux, afin de s'assurer qu'ils offrent une résistance suffisante.

Les maçonneries qui constituent les voûtes, sont supposées assez dures pour ne point s'écraser à l'instant de la rupture, et l'on admet que le nombre des joints suivant lesquels cette rupture peut s'opérer, est infini à partir de la clef.

Enfin on néglige la cohésion des mortiers qui est à peu près nulle, en effet, à l'époque du décintrement.

Figure 1re. Considérons une voûte AB*a*B′A′, posée sur ses naissances et en équilibre. Si chacune de ses deux moitiés existait seule, elle s'écroulerait, en tout ou en partie, vers le centre. Ce mouvement est empêché par l'action réciproque des deux demi-voûtes, action due uniquement à la pesanteur, et qui a son point d'application à l'un des points du joint de la clef, que nous supposerons, pour le moment, à l'extrémité *a*. Il se produit donc, au point *a*, deux forces égales et opposées, et on peut remplacer l'action de l'une des demi-voûtes, *ab*A′B′ par exemple, par une force horizontale F, tirant de *a* vers C, qui produise le même effet: celui de maintenir la demi-voûte AB*ab* sur sa naissance, et de l'empêcher de tomber, en tout ou en partie, du côté de l'intrados.

Figure 2.

Cette force horizontale résultant de l'action d'une demi-voûte sur l'autre, est ce qu'on appelle la poussée

horizontale ou simplement *poussée* de la voûte. Pour avoir son intensité F, remarquons que celle-ci doit satisfaire à deux conditions pour que la demi-voûte AB*ab* se tienne en équilibre sur sa naissance : 1°. empêcher un voussoir quelconque *mnab* de tourner sur son arête d'intrados *m*, ce qui exige que F soit égale ou supérieure à la plus grande des valeurs que peut prendre l'expression $\frac{P.\varphi}{\gamma}$: P désignant la surface de profil du voussoir, φ la distance horizontale *mg* de son centre de gravité G, au point de rotation *m*, et γ la distance *md* de la force horizontale F, au même point ; 2°. empêcher un voussoir quelconque de glisser en descendant le long de son plan de joint *mn*, ce qui exige que F soit égale ou supérieure à la plus grande des valeurs que peut prendre l'expression

$$\frac{P}{\text{tang.}(\alpha + \theta)} = G ;$$

P désignant toujours la surface de profil qui représente le poids du voussoir, α l'angle du plan de joint avec la verticale, et θ l'angle du frottement de la maçonnerie, angle qui a pour tangente le rapport de ce frottement à la pression (*).

Ainsi, étant donnée une voûte, on formera les deux expressions :

$$F = \frac{P.\varphi}{\gamma}, \qquad G = \frac{P}{\text{tang}(\alpha + \theta)},$$

au moyen des données appartenant à cette voûte, et de

(*) Voyez le mémoire de M. Audoy, inséré dans le N° 4 du *Mémorial de l'officier du génie*, page 25, et le *Cours de stabilité des constructions* de M. Persy, lithographié à l'école de Metz, 3e édition, page 110.

l'angle α : on cherchera le maximum de chacune d'elles en considérant α comme variable, et le plus grand des deux sera pris pour la valeur de la véritable poussée que nous désignerons dorénavant par Π : l'angle α qui correspond à ce maximum s'appelle *angle de rupture*, et le joint *mn* qu'il détermine, *joint de rupture*.

Figure 2. Remarquons maintenant que l'effet de la poussée horizontale est de renverser la demi-voûte à l'extérieur, en la faisant tourner autour de l'arête d'extrados B, du joint de la naissance. Il faut donc, pour qu'une voûte soit stable sur ses naissances, que le moment de sa poussée, autour du point B, soit plus petit que celui de la demi-voûte entière autour du même point. Si le contraire arrive pour une voûte proposée, elle ne pourra pas exister; et, si on en construisait une semblable, elle s'écroulerait après le décintrement. Il sera très important de connaître *à priori*, étant données les dimensions d'une voûte, si elle appartient à la classe de celles qui ont de la stabilité sur leurs naissances, ou de celles qui sont impossibles, c'est-à-dire qui s'écrouleraient après le décintrement.

Entre ces deux classes des voûtes stables et des voûtes impossibles, se trouve celle des voûtes qui sont en équilibre strict sur leurs naissances, c'est-à-dire, dans lesquelles le joint de la clef et les joints de rupture s'ouvrent ou sont près de s'ouvrir, et les voussoirs voisins de ces joints ne se touchent réellement que par leurs arêtes. Il faut remarquer que c'est seulement pour ce genre de voûtes que le calcul de la poussée, relativement à la rotation, est exact; pour elles, la valeur de cette poussée est rigoureusement celle du maximum de $\frac{P\varphi}{\gamma}$, et son point d'application est bien à l'extrados de la

clef, en *a*. Dans les voûtes stables, au contraire, il n'y a plus de joint de rupture proprement dit, c'est-à-dire où les voussoirs ne se touchent que par une seule arête ; et il faut admettre que les voussoirs supérieurs et inférieurs se touchent dans toute la longueur du joint, mais seulement que le joint de la clef, ceux des naissances, et certains joints *mn* près des reins, sont plus disposés que les autres à s'ouvrir.

Il résulte de là que le point d'application de la poussée, ou plutôt de la résultante de toutes les pressions qui s'exercent au joint de la clef, n'est plus en *a*, mais en un point intermédiaire entre *a* et *b* ; et, pour déterminer ce point, il faudrait avoir la loi des pressions qui ont lieu entre les deux joints extrêmes, loi qui nous est inconnue.

Une chose analogue a lieu au joint *mn*, que l'on continue à appeler joint de rupture. La résultante de la poussée horizontale et du poids du voussoir *mnab* qui passe rigoureusement par l'extrémité *m* de l'intrados dans le cas de l'équilibre strict, coupe le joint *mn* en un point intermédiaire entre *m* et *n* que l'on ne connaît pas.

On ne peut donc pas, dans les voûtes stables, calculer la poussée horizontale effective, à moins de supposer que les points d'applications dont nous venons de parler, se trouvent toujours, l'un en *a*, l'autre en *m* ; c'est ce que font tous les auteurs qui ont traité de la théorie des voûtes (*), et ce que nous admettrons avec eux.

(*) Voyez le mémoire cité de M. Audoy, le cours de M. Persy, et l'ouvrage de M. Navier, sur les *Applications de la mécanique aux constructions*, N^os^ 252 et 257.

D'après cela, nous pouvons déterminer, dans tous les cas, la poussée horizontale qui est l'élément le plus important du calcul des voûtes. Sa valeur ne dépendant que des quantités P, φ et γ, déterminées par la forme et les dimensions de la voûte, et nullement de la hauteur ou épaisseur des piédroits sur lesquels elle repose, on pourra la calculer *à priori*, et c'est ce que nous ferons pour toutes les voûtes circulaires. Il sera facile ensuite de résoudre cette question : *étant données une voûte et la hauteur de ses piédroits, trouver l'épaisseur que doivent avoir ceux-ci pour faire équilibre à la poussée* Π; ce qui exige que le moment de cette poussée, autour de l'arête extérieure B, du piédroit, soit égal au moment de toute la demi-voûte AB*Cab*A autour du même point. Il suffira donc de former l'équation d'équilibre $M = \Pi L$, M étant la somme des momens des parties qui composent la surface du profil AB*Cab*A, autour du point B, et L le bras de levier *a*D de la poussée. Il n'y aura d'inconnue, dans cette équation, que l'épaisseur *e* du piédroit, qui entrera dans la valeur de M, et qu'il s'agira de dégager.

Figure 3.

Nous n'avons rien dit des autres modes de rupture qui, théoriquement, pourraient avoir lieu, parce qu'ils n'appartiennent pas au cas des voûtes circulaires dont nous avons à traiter. M. Navier lui-même, après avoir discuté en détail les différens cas de rupture, réduit tous ceux qu'il est nécessaire de considérer pour la pratique (ouvrage cité n°. 247), aux trois suivans : 1°. rotation à l'intérieur; 2°. rotation à l'extérieur; 3°. glissement à l'extérieur.

M. Navier ne suppose pas que la poussée due au glissement à l'intérieur, puisse être utile à considérer

dans la pratique. Nous verrons cependant qu'elle peut l'emporter sur celle relative à la rotation, pour des voûtes qui ne s'écartent pas des formes usitées, et nous pensons qu'il est bon d'en tenir compte dans ces cas, puisque, par-là, on ne fait qu'augmenter la solidité.

Mais, au contraire, le glissement vers l'extérieur n'est pas nécessaire à considérer pour nous; et il n'arrive jamais, dans les voûtes circulaires, que la poussée puisse faire glisser, tout ou partie de la voûte, du dedans vers le dehors, sur quelqu'un des plans de joints : c'est-à-dire que, pour tous les joints, l'expression $\frac{P}{\text{tang.}(\alpha-\theta)}$ est constamment plus petite que la poussée horizontale due à la rotation. Ainsi, les modes de rupture possibles pour les voûtes circulaires, se réduisent aux deux suivans : 1°. rotation à l'intérieur; 2°. glissement vers l'intérieur; et ce sont les seuls dont nous tiendrons compte dans la recherche de la poussée.

§ II.

VOÛTES EN PLEIN CINTRE, EXTRADOSSÉES PARALLÈLEMENT.

1°. Les données, pour ce genre de voûtes, se réduisent aux rayons r et R de l'intrados et de l'extrados. On trouve, en nommant α l'arc qui, dans le cercle dont le rayon est l'unité, mesure l'angle d'un joint quelconque mn avec la verticale, Figure 2.

$$P=\tfrac{1}{2}\alpha(R^2-r^2);\quad \varphi=r\sin.\alpha-\frac{2}{3}\frac{(R^3-r^3)(1-\cos.\alpha)}{\alpha(R^2-r^2)};\quad y=R-r\cos.\alpha.$$

Au moyen de ces valeurs de P, φ et y, on a

$$F=\frac{P\varphi}{y}=\frac{3r(R^2-r^2)\alpha\sin.\alpha-2(R^3-r^3)(1-\cos.\alpha)}{6(R-r\cos.\alpha)}, \qquad (1)$$

pour expression de la force horizontale F, qui, appliquée à l'extrados de la clef, peut empêcher le voussoir *abmn*, correspondant à l'angle α, de tourner autour du point *m*.

2, En faisant entrer, dans cette valeur de F, le rapport $\frac{R}{r}=K$, ou posant $R=Kr$, elle prend cette forme

$$F=r^2\frac{\frac{1}{2}(K^2-1)\alpha\sin.\alpha-\frac{2}{3}(K^3-1)(1-\cos.\alpha)}{K-\cos.\alpha}, \qquad (2)$$

En différentiant cette expression par rapport à α, elle donne, pour calculer l'inclinaison du joint de rupture qui correspond au maximum Π de F, l'équation de condition suivante :

$$\cos.\alpha+(1-K\cos.\alpha)\frac{\alpha}{\sin.\alpha}=K-\frac{2}{3}\cdot\frac{K^3-1}{K+1}, \qquad (3)$$

On conclut, des équations (2) et (3), que, pour toutes les voûtes dans lesquelles K est le même et que nous appellerons *semblables*, 1°. la poussée maximum est proportionnelle au carré du rayon de l'intrados; 2°. l'angle de rupture est constant.

MM. Lamé et Clapeyron, dans un mémoire publié en 1823 (*Annales des Mines*, tome 8), sont arrivés, par l'introduction du rapport K et la considération de l'équation de condition (3), à ces résultats remarquables, qui nous permettent de conclure, *à priori*, les angles de rupture et les poussées horizontales pour toutes les voûtes circulaires.

3. L'équation (3) étant transcendante, on devra la résoudre par tâtonnemens pour chacune des valeurs numériques de K, et substituer celles de α qu'elle donne, dans l'équation (2), pour obtenir la poussée maximum que nous avons désignée par Π. Mais on simplifiera un peu le calcul de cette dernière quantité, dans le cas qui nous occupe, d'après une méthode indiquée par M. Persy (Cours déjà cité, pages 122 et 130). Représentons, en effet, l'expression générale (2), de F, par $\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}$; la condition du maximum donne

$$f(\alpha)\,d.\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha)d.f(\alpha) = 0\,;\ \text{d'où}\ \frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{d.f(\alpha)}{d.\varphi(\alpha)}.$$

C'est-à-dire que le maximum Π de F_1 est égal au rapport de la différentielle du numérateur à celle du dénominateur de l'expression (2). En formant ainsi cette valeur, on a la formule suivante pour la poussée :

$$\Pi = r^2\left\{\frac{1}{2}(K^2-1)\left(1+\frac{\alpha}{\sin.\alpha}\cos.\alpha\right)-\frac{1}{3}(K^2-1)\right\} \qquad (4).$$

Formation de la table des angles de rupture et des poussées.

4. Le système des deux équations (3) et (4) permet de résoudre toutes les questions relatives aux voûtes en plein cintre, extradossées parallèlement. Une voûte étant donnée, on forme le rapport $\frac{R}{r} = K$, on substitue sa valeur dans l'équation (3), et on détermine, par des substitutions successives, la valeur de α qui y satisfait. Cette valeur étant trouvée, on la met, ainsi que celle de K, dans l'équation (4), et on a la poussée horizontale de la voûte.

Par exemple, supposons le rapport $\frac{R}{r} = K = 1{,}20$, ce qui peut répondre à une infinité de voûtes semblables. Pour cette valeur de K, l'équation (3) devient : $\cos.\alpha + (1 - 1.2\cos.\alpha)\frac{\alpha}{\sin.\alpha} = 0{,}97934$,

Or, pour $\alpha = 50°$, le premier membre $= 0{,}90326$,
$\alpha = 55°, \ldots = 0{,}93884$,
$\alpha = 59°, \ldots = 0{,}96934$,
$\alpha = 60°, \ldots = 0{,}98368$,

La véritable valeur de α est donc comprise entre 59 et 60°, et on trouve, par les parties proportionnelles, qu'elle est égale à 59°.41′. Cette valeur étant mise dans l'équation (4), ainsi que celle K = 1.20, il en résulte : $\Pi = 0{,}111395\, r^2$.

En opérant de même, pour une série de valeurs de K fort rapprochées, et ne différant que de un centième, nous avons formé la table qu'on trouve, à la fin de ce mémoire, sous la lettre (A), et qui est propre à donner immédiatement l'angle de rupture et la poussée horizontale pour toutes les voûtes, en plein cintre, extradossées parallèlement.

5. Pour avoir les limites des valeurs de K à substituer, nous ferons $\alpha = 0$ dans l'équation (3), qui se réduit alors à la suivante :

$$3K^2 - K^3 = 2,$$

dont les deux racines positives sont K = 1 et K = 2,732. Ainsi, pour ces deux valeurs de K, il n'y a point d'angle de rupture, ou il n'y a d'autre joint de rupture que celui de la clef; et, de plus, les voûtes auxquelles elles correspondent n'ont point de poussée

horizontale; ce qui est indiqué par l'équation (4) qui donne $\Pi = 0$. Quelles sont donc ces deux espèces de voûtes?

La valeur $K = 1$, qui donne $R = r$, correspond à une voûte d'une épaisseur nulle, puisque les rayons de l'intrados et de l'extrados sont égaux; il n'y a donc point de poussée.

La seconde limite des valeurs de K, $K = 2{,}732$, correspond au système de voûtes dont le rapport de l'épaisseur au diamètre, est celui de 1 à 1,154; par exemple, à une voûte de 1^m d'épaisseur, dont le diamètre serait $1^m{,}154$. Pour cette voûte et toutes ses semblables, il n'y a plus de rotation possible; c'est-à-dire que, quelque petit que soit l'angle α ou le voussoir qu'on peut détacher vers la clef, son centre de gravité ne tombe jamais au-delà de l'intrados. Il n'y a donc, pour aucun voussoir, de tendance à tourner, et la force destinée à empêcher ce mouvement, est nulle. Il ne résulte pas de là que la demi-voûte se soutiendrait d'elle-même. En effet, il y aurait toujours une poussée, mais elle proviendrait du glissement, et il faudrait la calculer de manière à empêcher ce glissement pour tous les voussoirs.

6. En deçà de ce cas extrême, où la poussée relative à la rotation est nulle, et où la poussée due au glissement est évidemment la seule à considérer, on conçoit qu'il peut en exister une infinité d'autres pour lesquels le glissement soit également possible. Il faut donc, afin de compléter la table, former aussi la valeur de la poussée due au glissement, pour les différentes valeurs de K, les mettre en regard de celles qui sont relatives à la rotation, et prendre la plus

grande des deux pour la véritable poussée de la voûte, qui doit entrer dans l'équation d'équilibre.

7. D'après ce que nous avons vu § I^er., la force horizontale capable d'empêcher le glissement d'un voussoir quelconque qui tendrait à descendre sur son plan de joint inférieur, a pour expression générale $G = \frac{P^o}{\text{tang.}(\alpha+\theta)}$, et il faut prendre le maximum de cette expression en y mettant la valeur de $P = \frac{1}{2}\alpha(R^2 - r^2)$, et celle de l'angle θ qui se déduit de l'expérience.

Selon M. Boistard, $\theta = 37° 14'$, valeur qui correspond à la tangente 0,76, rapport du frottement à la pression, de la maçonnerie, qu'il déduit de ses expériences. Mais M. Rondelet a fait aussi des expériences sur le frottement des maçonneries, desquelles il résulte que les parallélipipèdes en pierre de liais, équarris et dressés au grès, commencent à glisser sur un plan de la même espèce de pierre, dressé de même et incliné d'environ 30° à l'horizon.

Nous admettrons cette dernière donnée comme plus favorable à la solidité. D'ailleurs, toutes les expériences sont faites avec des pierres superposées sans mortier, et il serait possible, qu'en décintrant la voûte avant que le mortier ne fût sec, comme on le fait ordinairement, son addition favorisât le glissement des voussoirs qu'il est destiné à empêcher, plus tard, par son adhérence. Il convient donc d'admettre le plus petit angle de frottement, et nous prendrons $\theta = 30°$.

D'après cela, l'expression précédente de G, devient

$$G = \frac{1}{2} r^2 \frac{(K^2 - 1)\alpha}{\text{tang.}(\alpha + 30°)}.$$

La recherche de la valeur de α qui la rend un maximum, ne peut se faire que par des substitutions; et on trouve, après quelques essais, que cette valeur est de 26°. Ainsi, dans les voûtes à extrados parallèle, qui nous occupent, c'est le voussoir dont le joint forme un angle de 26° avec la verticale qui a la plus grande tendance à glisser, ou qui exige la plus grande force pour être soutenu sur ce joint. Cette force a pour valeur l'expression

$$0{,}15304\, r^2 (K^2 - 1) = \Pi,$$

dont on s'est servi pour calculer les poussées, relatives au glissement, rapportées dans la table (A), qu'elles complètent.

8. L'examen de cette table donne lieu à plusieurs remarques importantes.

1°. Considérons une voûte conservant la même épaisseur, 1^m par exemple, et prenant successivement tous les diamètres possibles. Pour le diamètre minimum $1^m{,}154$, auquel ne répond aucun joint de rupture par rotation, l'angle de rupture est nul. Le diamètre augmentant, cet angle va aussi en croissant jusqu'au diamètre de $4^m{,}00$, pour lequel il atteint son maximum de 64° 9′. Le diamètre continuant à augmenter au-delà de 4^m, l'angle de rupture décroît au contraire, de plus en plus, jusqu'au diamètre infini, pour lequel il redevient nul.

2°. Pour toutes les voûtes usuelles, qu'on peut regarder comme comprises entre $K = 2$ et $K = 1{,}20$, à peu près, l'angle de rupture ne varie que de quelques degrés, et demeure compris entre 59 et 64°. Cette variation très-lente de l'angle de rupture, dans les

voûtes usitées, montre que la table des valeurs de K, calculées de centième en centième, est bien suffisante, et que, si le rapport $\frac{R}{r}$, relatif à une voûte donnée, tombe entre deux valeurs consécutives de K, de la table, on pourra conclure, sans inexactitude sensible, soit l'angle de rupture, soit la poussée horizontale, par des parties proportionnelles.

3°. Le coefficient de r^2, dans la série des valeurs de la poussée horizontale, est nul pour les deux limites de K où l'angle de rupture est o, et suit, entre ces deux limites, une marche analogue à celle de cet angle; mais son maximum ne correspond pas à la même valeur de K : le maximum de l'angle correspond à K = 1,60, et celui du coefficient à K = 1,58. Au reste, quoique le coefficient de r^2, aille, à partir de son maximum, constamment en décroissant jusqu'à o, la poussée elle-même va toujours en augmentant, à cause de la rapidité de l'accroissement de r^2.

4°. Le coefficient de r^2, dans les valeurs de la poussée due au glissement, l'emporte sur celui des valeurs relatives à la rotation, jusqu'à K=1.44; il faudra donc, pour les voûtes qui donneront un rapport K, compris entre 2.732 et 1.44, employer la première de ces valeurs, puisqu'elle est plus grande que l'autre, et on devra considérer l'angle de 26° comme leur angle commun de rupture.

9. La table précédente va nous donner le moyen de résoudre bien facilement deux questions générales et importantes qu'on se propose ordinairement dans la théorie des voûtes.

Première question. Les dimensions d'une voûte,

sans piédroits, étant données, trouver si cette voûte pourra se soutenir, sur ses naissances, après le décintrement.

Pour que cela ait lieu, il faut que le moment de la demi-voûte, pris relativement à l'arête extérieure du joint des naissances, soit au moins égal à celui de la poussée horizontale appliquée à l'extrados de la clef, relativement à la même arête. Or le moment de cette demi-voûte a pour expression

$$r^3\left\{\frac{1}{4}\pi K(K^2-1)-\frac{1}{3}(K^3-1)\right\};$$

celui de la poussée est égal à $r^3\,C.K$, en désignant par C, le coefficient numérique de r^3, qui se trouve dans la table des poussées. On peut donc former une autre table des valeurs de ces deux espèces de momens, pour toutes les valeurs de K, et les mettre en regard : en voici une partie (*).

(*) Si on pouvait prendre la valeur de α dans l'équation de condition (3) du n° 1, et la porter dans l'équation (2) ou (4), on aurait la valeur de la poussée en fonction de K seulement ; et, par suite, son moment $\Pi K r^3$ se trouverait aussi exprimé en fonction de K et de r, comme le moment M, de la demi-voûte. En égalant entre elles les expressions de ces deux momens, on aurait une équation propre à donner la valeur de K appartenant au système des voûtes qui seraient strictement en équilibre sur leurs naissances. Cela étant impossible, nous sommes obligé de conclure la connaissance de cette limite importante, d'un tableau des valeurs de ces deux momens, mises en regard, en examinant, à cet effet, quelle est la valeur de K pour laquelle ces deux momens deviennent égaux.

VALEUR du rapport $K = \frac{R}{r}$	RAPPORT du diamètre à l'épaisseur.	MOMENT de stabilité de la voûte sur sa naissance.	MOMENT de la poussée horizontale.
2.00	2.000	2 379075 r^3	0,918240 r^3
1.50	4.000	0,680956 r^3	0,286250 r^3
1.40	5.000	0,474236 r^3	0,226478 r^3
1.30	6.666	0,305502 r^3	0,186290 r^3
1.20	10.000	0,172024 r^3	0,133608 r^3
1.15	13.333	0,117659 r^3	0,105528 r^3
1.14	14.285	0,107733 r^3	0,098075 r^3
1.13	15.884	0,098119 r^3	0,093274 r^3
1.12	16.666	0,088806 r^3	0,087763 r^3
1.114	17.544	0,083320 r^3	0,083434 r^3
1.11	18.181	0,079800 r^3	0,080571 r^3
1.10	20.000	0,071093 r^3	0,074292 r^3
1.09	22.222	0,062687 r^3	0,067326 r^3
1.08	25.000	0,054576 r^3	0,061086 r^3
1.07	28.571	0,042939 r^3	0,054198 r^3
1.06	33.333	0,039227 r^3	0,046327 r^3
1.05	40.000	0,031954 r^3	0,040034 r^3
1.04	50.000	0,025031 r^3	0,034727 r^3
1.03	66.666	0,018356 r^3	0,025324 r^3
1.02	100.000	0,011962 r^3	0,017250 r^3
1.01	200.000	0,005844 r^3	0,008980 r^3

L'inspection de ce tableau fait voir que les momens de la demi-voûte et de la poussée deviennent, à très-peu près, égaux pour la valeur $K = 1,114$, c'est-à-dire, pour le système de voûtes dans lesquelles le diamètre est à peu près égal à 17 fois $\frac{1}{3}$ l'épaisseur : pour les valeurs de K supérieures à 1,114, les voûtes ont une stabilité qui est d'autant plus grande que le rapport K s'éloigne davantage de la limite 1,114 ; pour les valeurs plus petites, le moment de la poussée est le plus grand, et les voûtes s'écrouleraient après le décintrement. Ainsi, afin de répondre à la question proposée, étant donnée une voûte en plein cintre extradossée parallèlement, on divisera le diamètre par l'épaisseur ; si l'on obtient

un nombre plus grand que 17,544, la voûte proposée sera impossible, et ne pourrait se soutenir après le décintrement : si l'on obtient 17.544, la voûte sera en équilibre strict; et, si l'on trouve un nombre plus petit que 17.544, elle aura de la stabilité sur ses naissances. . .

10. Nous citerons deux faits d'expérience qui rentrent parfaitement dans cette loi fournie par la théorie.

1°. La voûte mise en expérience par M. Boistard, avait 8 pieds de diamètre, et 4 pouces d'épaisseur; son diamètre était donc égal à 24 fois l'épaisseur; aussi M. Boistard nous apprend-il qu'elle s'écroulait après le décintrement.

2°. Un autre fait plus remarquable et qui confirme bien notre résultat théorique, se déduit des expériences de M. Rondelet. Parmi plusieurs conclusions qu'il tire d'un grand nombre d'expériences faites sur de petits modèles de voûtes, la 20me est ainsi conçue : « Une voûte en plein cintre, extradossée également » dans toute son étendue, étant divisée en quatre » parties égales, ne peut pas se soutenir lorsque son » épaisseur est moindre que la dix-huitième partie de » son diamètre, quelle que puisse être la résistance » des piédroits, et même sans piédroits. » (*Traité de l'art de bâtir, tome* 3, *page* 259.)

Nous ferons remarquer que si la voûte, au lieu de n'avoir que quatre voussoirs, en avait eu un plus grand nombre, elle se serait probablement rompue plus tôt, et que l'épaisseur limite trouvée par M. Rondelet, au lieu d'être le $\frac{1}{18}$ de l'épaisseur, se serait approchée encore davantage de la limite théorique $\frac{1}{17.544}$.

11. *Deuxième question.* L'intrados d'une voûte étant

donné, trouver la plus petite épaisseur que puisse avoir cette voûte pour se maintenir sur le plan de ses naissances, supposé immobile.

Pour résoudre cette question, les auteurs prescrivent de supposer d'abord, à la voûte, une épaisseur très-petite, de calculer la poussée horizontale qui en résulte, et de comparer le moment de cette poussée à celui de stabilité de la demi-voûte, qui est supposé le plus faible pour la petite épaisseur donnée : puis de recommencer la même opération et les mêmes calculs pour des épaisseurs qu'on augmenterait, de plus en plus, jusqu'à ce qu'on trouve le moment de la demi-voûte précisément égal à celui de la poussée.

On évitera tous ces calculs par la connaissance de la limite des voûtes stables et des voûtes impossibles, trouvée par le tableau précédent, et cette seconde question est immédiatement résolue par la première. Ainsi, connaissant le rayon r, de l'intrados de la voûte donnée, on calculera le rayon de l'extrados, R, en posant $\frac{R}{r} = 1,114$, d'où $R = 1,114r$; et $R - r$ sera la plus petite épaisseur cherchée. Par exemple, si $r = 10^m$, on tire $R = 11^m,14$, et $1^m,14$ pour la plus petite épaisseur que puisse avoir la voûte, de 10^m de rayon, pour se maintenir sur ses naissances. Si $r = 5^m$, on a $R = 5^m,57$, et la plus petite épaisseur est $0^m,57$. Pour $r = 2^m$, la plus petite épaisseur serait $0^m,228$, etc.

Épaisseur des piédroits.

12. Il nous reste, afin de terminer ce qui concerne les voûtes, en plein cintre, extradossées parallèlement, à résoudre cette question, la plus impor-

tante pour la pratique : *Une voûte étant donnée avec la hauteur de ses piédroits, trouver l'épaisseur que doivent avoir ces derniers pour résister à la poussée.*

L'équation d'équilibre M = n.L est ici, en y introduisant K,

$$\frac{1}{2}he^2+\frac{1}{4}\pi(K^2-1)r^2e+\left(\frac{1}{4}\pi(K^2-1)-\frac{1}{3}(K^3-1)\right)r^3=n(Kr+h). \quad (*)$$

En y substituant les différentes valeurs de K et celles de n qui leur correspondent, on formerait un tableau d'équations d'équilibre déjà fort simples, et qui donneraient immédiatement e par la résolution d'une équation du 2°. degré.

13. Mais on simplifiera encore plus les applications en résolvant d'avance ces équations du 2°. degré, et donnant le tableau des valeurs de *e* elles-mêmes. A cet effet, mettons à la place de n, dans l'équation précédente, son expression Cr^2, C étant le coefficient numérique de r^2 qui se trouve dans la table des poussées (A), cette équation deviendra

$$\frac{1}{2}he^2+\frac{1}{4}\pi(K^2-1)r^2e=r^3\left\{KC+\frac{1}{3}(K^3-1)-\frac{1}{4}\pi(K^2-1)\right\}+Chr^2$$

d'où l'on tire

$$\frac{e}{r}=-\frac{1}{4}\pi(K^2-1)\frac{r}{h}+$$

$$+\sqrt{\frac{1}{16}\pi^2(K^2-1)^2\frac{r^2}{h^2}+2\left\{KC+\frac{1}{3}(K^3-1)-\frac{1}{4}\pi(K^2-1)\right\}\frac{r}{h}+2C}. \quad (E)$$

(*) L'auteur avait rapporté, dans son mémoire, les démonstrations très-simples de cette formule et de plusieurs autres qui s'y trouvent contenues ; les bornes de ce recueil ont contraint de les passer sous silence ; ce qui a d'autant moins d'inconvénient que, depuis les publications du mémoire de M. Audoy et du cours de M. Persy, la matière est devenue familière au plus grand nombre des officiers du génie. (*Note du rédacteur.*)

Par la substitution des valeurs de K et de C, dans cette formule, elle donnera celles à coefficiens numériques, qui se trouvent toutes calculées dans la table (B).

14. Au moyen de ces formules, on voit combien les applications deviennent faciles. En effet, une voûte étant donnée par ses rayons r et R, et par la hauteur h de ses piédroits, on calculera le rapport $\frac{R}{r}=K$: s'il est exactement un de ceux du tableau, on trouvera, vis-à-vis sa valeur, la formule dans laquelle il suffira de substituer les valeurs de r et de h, pour avoir le rapport de l'épaisseur e du piédroit au rayon r, par une simple extraction de racine carrée; si ce rapport K, tombe entre deux valeurs consécutives de la table, on calculera les coefficiens d'une formule intermédiaire par des parties proportionnelles.

La réunion de ces formules peut donc tenir lieu, en quelque sorte, de tables toutes calculées; elles sont même préférables à des tables dans le genre de celles qui ont été obtenues par la formule de Lahire, puisque celles-ci ne peuvent offrir qu'un nombre fort limité de diamètres, d'épaisseurs de voûtes et de hauteurs de piédroits, tandis que chacune de nos formules sert pour tout un système de voûtes semblables; c'est-à-dire pour l'infinité de voûtes dans lesquelles le rapport $K=\frac{R}{r}$ est le même.

15. On pourrait même former un tableau général qu'il suffirait de consulter à chaque application, et qui offrirait les épaisseurs des piédroits de toutes les voûtes extradossées parallèlement, quels que

fussent leur diamètre, leur épaisseur et la hauteur de ces piédroits. En effet, la formule (E), du n°. 13, étant de la forme $e = rf\left(a\frac{r}{h}+b\right)$, on voit que, pour toutes les voûtes semblables dans lesquelles le rapport $\frac{r}{h}=k$ sera le même, on aura simplement $\frac{e}{r}=c$, c étant un coefficient constant. D'après cette observation, le tableau dont nous parlons et dont nous avons calculé un élément, aurait la forme suivante :

VALEURS du rapport $K=\frac{R}{r}$	VALEURS DE $c=\frac{e}{r}$ CORRESPONDANT A CHACUNE DES VALEURS DE $k=\frac{r}{h}$.								
	$k=2$	$k=1$	$k=\frac{1}{2}$	$k=\frac{1}{3}$	$k=\frac{1}{4}$	$k=\frac{1}{5}$	$k=\frac{1}{6}$	etc.	$k=0$
1.24	»	»	»	»	»	»	»	»	»
1.25	0,2041	0,2829	0,3639	0,4064	0,4267	0,4402	0,4503	»	0,5069
1.26	»	»	»	»	»	»	»	»	»
» »	»	»	»	»	»	»	»	»	»

Il suffirait, pour que ce tableau fût complet, qu'il renfermât, à peu près, une dixaine de valeurs de k, entre $k=0$ et $k=2$; il dispenserait alors de tout calcul. Une voûte étant donnée, le rapport $\frac{r}{h}$ indiquerait la colonne verticale, et le rapport $\frac{R}{r}$ la ligne horizontale dont l'intersection, avec la première, donnerait le coefficient par lequel il faudrait multiplier le rayon r pour obtenir l'épaisseur du piédroit.

16. Pour passer des formules de la table (B), donnant des épaisseurs correspondantes à l'équilibre strict ou instable, à d'autres formules qui donneront des

épaisseurs pratiques, nous admettrons, d'après M. Audoy, qu'on obtient une stabilité suffisante pour la pratique, en multipliant la valeur de la poussée par le coefficient 1.90, ce qui donne la stabilité des voûtes calculées par la formule de Lahire.

D'après cela, la formule (E), du n°. 13, se transformera en formule pratique, en y mettant 1.90 C, ou C+0,90 C au lieu de C. Il n'y aura donc que deux termes à changer, et il est clair qu'il suffira d'ajouter au coefficient de $\frac{r}{h}$, sous le radical, $2K \times 0{,}90\ C =$ $= 1{,}80\ K.C$, et, au terme tout connu sous le même radical, $2 \times 0{,}90\ C = 1.80\ C$. Nous ne croyons donc pas nécessaire de calculer les nouvelles formules qui résulteraient du changement de ces deux termes, puisqu'il est si facile de les former, dans chaque cas, au moyen du coefficient de stabilité 1.90, ou de tout autre qu'on jugerait convenable d'admettre.

Limite des épaisseurs de piédroits.

17. En jetant les yeux sur la formule générale (E), des épaisseurs de piédroit, on voit que la hauteur h devenant infinie, elle se réduit à

$$e = r\sqrt{2C} = \sqrt{2Cr^2} = \sqrt{2\Pi};$$

ce qui nous apprend que *l'épaisseur du piédroit dont la hauteur est infinie, est égale à la racine carrée du double de la poussée horizontale* (1).

Mais, afin de montrer comment l'épaisseur du pié-

(*) M. Rondelet avait déjà conclu ce résultat d'une formule empirique établie au moyen d'expériences faites sur de petits modèles de voûtes.

droit d'une voûte, dont les rayons d'intrados et d'extrados restent constans, varie avec la hauteur de ce piédroit, jusqu'à la limite où celle-ci devient infinie, nous allons faire une application complète. Nous prendrons pour exemple la voûte de 8^m de diamètre et 1^m d'épaisseur. Pour cette voûte, $K = \frac{5}{4} = 1.25$; en cherchant, dans la table (B), la formule correspondante à cette valeur de K, et y mettant la valeur $r = 4^m$, elle devient :

$$\frac{1}{4}e = -\frac{1.7672}{h} + \sqrt{\frac{3.1232}{h^2} + \frac{0,2922}{h} + 0,2569}.$$

La formule donnant l'épaisseur pratique (n° 16) est, pour la même voûte,

$$\frac{1}{4}e = -\frac{1.7672}{h} + \sqrt{\frac{3.1232}{h^2} + \frac{1,4484}{h} + 0,4881}.$$

Voici les résultats de ces deux formules pour une série de valeurs de h :

	Équilibre strict.	Stabilité de Lahire.
$h = 3^m.04$ (*). . . .	$e = 1^m.0000$. . . .	$e = 2^m.2444$
$h = 4^m$.	$e = 1^m,1276$. . . .	$e = 2^m.3198$
$h = 6^m$.	$e = 1^m.3272$. . . .	$e = 2^m.4355$
$h = 8^m$.	$e = 1^m.4563$. . . .	$e = 2^m.5056$
$h = 10^m$.	$e = 1^m.5463$. . . .	$e = 2^m.5530$
$h = 20^m$.	$e = 1^m.7605$. . . .	$e = 2^m.6620$
$h = 100^m$.	$e = 1^m.9694$. . . .	$e = 2^m.7659$
$h = \infty$.	$e = 2^m.0275$. . . .	$e = 2^m.7946$

(*) Cette hauteur est celle pour laquelle la voûte est en équilibre avec une épaisseur de piédroit égale à la sienne propre ; au-delà, il faut une sur-épaisseur. Cette limite s'obtient en faisant e égal à l'épaisseur de la voûte dans l'équation d'équilibre du n° 13, ou $e = 1^m$, dans notre exemple, et tirant la valeur de h qui en résulte.

Ces résultats font voir combien peu rapidement l'épaisseur du piédroit augmente avec sa hauteur, et on conçoit qu'il doit en être ainsi, puisque le poids de tout le système croît, à peu près, dans le même rapport que le bras de levier de la poussée. On voit aussi que, cette hauteur devenant infinie, les épaisseurs de piédroits qui y correspondent, diffèrent assez peu de celles qu'ils doivent avoir pour des hauteurs ordinaires, surtout quant aux épaisseurs pratiques; l'augmentation totale, depuis $h = 4^m$, jusqu'à $h = \infty$, n'étant que de $0^m,47$.

Comme les épaisseurs-limites sont très-faciles à trouver, puisque celle relative à l'équilibre strict est $\sqrt{2\pi}$, et celle donnant la stabilité de Lahire $\sqrt{3.8\pi}$, nous pensons que leur considération peut être fort utile dans la pratique, et qu'une table qui en présenterait les valeurs pour toutes celles de K, pourrait dispenser de recourir aux formules générales, dans beaucoup de cas où l'on ne craint pas de donner quelques décimètres de plus aux maçonneries. Alors tout le calcul des voûtes circulaires extradossées parallèlement, se trouverait résumé dans les deux colonnes ajoutées à la table (A), et qui fournissent immédiatement les épaisseurs-limites des piédroits, 1° dans le cas de l'équilibre strict; 2° avec la stabilité des voûtes de Lahire (*voyez* quelques applications dans la *Note* I^re^).

§ III.

VOÛTES EN PLEIN CINTRE, EXTRADOSSÉES EN CHAPE.

Figure 4. 18. Nous supposerons le plan de la chape tangent à l'extrados de la voûte proprement dite, ce qui est

le cas habituel de la pratique, et que le joint de rupture mn se relève verticalement au-delà de l'extrados, ce qui paraît plus naturel que de le supposer se prolongeant à travers la maçonnerie de remplissage jusqu'en q. Nous admettrons de plus, avec M. Audoy, que la poussée horizontale agit toujours en a, à l'extrados de la clef, attendu que la maçonnerie qui charge cette clef ne forme pas corps avec la voûte, et n'agit que par son poids.

En désignant par I, l'angle d'inclinaison de la chape avec la verticale de la clef, pris du côté de la voûte, on a, dans le cas dont il s'agit, pour l'expression générale de la force horizontale agissant en a, et relative à un voussoir quelconque faisant l'angle α avec la verticale, la formule suivante :

$$F=r^2\frac{\sin.^2\alpha}{6(K-\cos.\alpha)}\left\{\frac{K^2}{\sin.I}\left\{6-3K-(3-2K)\sin.(I+\alpha)\right\}-\left(\frac{3\alpha}{\sin.\alpha}-\frac{1}{\cos.^2\frac{1}{2}\alpha}\right)\right\}. \quad (1)$$

Cette expression est trop compliquée pour qu'on puisse, comme dans le cas des voûtes extradossées parallèlement, faire $\frac{dF}{d\alpha}=0$, afin d'obtenir une équation de condition qui donnerait l'angle de rupture α, correspondant au maximum de F pour chaque valeur de K. Il faudra donc, pour avoir la poussée, revenir à la méthode de tâtonnement; substituer directement, dans la formule (1), différentes valeurs de α, et former le tableau des valeurs de F qui en résulteront : la plus grande de ces valeurs sera celle de la poussée horizontale.

19. Faisons l'application de cette formule à la voûte du magasin à poudre de Vauban, qui avait 25 pieds de diamètre et 3 pieds d'épaisseur aux reins; la hau-

teur de l'angle de la chape au-dessus du plan des naissances étant de 20 pieds $\frac{1}{2}$. Il résulte de ces données :

$$I = 49^\circ\ 7'\ 17'',\ r = 4^m,0605,\ R = 5^m,035 \text{ et } K = \frac{R}{r} = 1,24,$$

En mettant ces valeurs de I et de K, dans l'équation (1), et substituant quelques valeurs de α, on trouve les résultats suivans :

pour $\alpha = 53^\circ$, ... $F = 0,229290r^2$,
$\alpha = 54^\circ$, ... $F = 0,229381r^2 = \Pi$,
$\alpha = 55^\circ$, ... $F = 0,229295r^2$;

donc l'angle de rupture est de 54°, et la valeur de la poussée est $\Pi = 3,78196$.

On pourrait obtenir cet angle plus exactement, en substituant des valeurs comprises entre 54° et 55°, mais la difficulté et la longueur des calculs augmenteraient beaucoup, et l'exactitude qu'on obtient en ne substituant que des nombres exacts de degrés, paraît bien suffisante, à cause de la propriété du maximum. On voit, en effet, par l'application que nous venons de faire, et cela a lieu généralement pour tous les autres cas, que les angles voisins de celui de rupture donnent des coefficiens de r^2, qui ne diffèrent que dans la 4e décimale.

20. La formule générale qui donne la poussée relative au glissement, étant $G = \frac{P}{\text{tang.}(\alpha+\theta)}$, elle devient ici, en y substituant la valeur de P et introduisant K,

$$G = r^2 \frac{\sin.\alpha}{\sin.I \text{tang.}(\alpha+\theta)} \left\{ K^2 \left(1 - \frac{1}{2}\sin.(I+\alpha) \right) - \frac{1}{2}\sin.I \frac{\alpha}{\sin.\alpha} \right\} \quad (2)$$

En supposant, dans cette expression, $\theta = 30^\circ$ (7),

on pourrait, pour chaque valeur de I, conclure, par des substitutions, la valeur de α qui répond au maximum de la force G. Cette valeur étant substituée dans l'expression ci-dessus (2), on aurait la formule de la poussée due au glissement : c'est celle qu'il faudra considérer quand elle surpassera la valeur donnée par la formule (1), relative à la rotation.

Chapes inclinées à 45°.

21. Il serait impossible de former autant de tables des poussées qu'il peut y avoir d'inclinaisons pour les chapes, ou de valeurs de l'angle I. On pourrait seulement en considérer quelques-unes des plus usitées, et former autant de tables correspondantes. Nous nous bornerons à une seule, celle de 45°, non que les applications soient plus faciles à calculer pour cet angle que pour tout autre, mais parce qu'il peut être considéré comme la limite de ceux qu'on emploie dans la pratique. Il arrive, en effet, bien rarement que l'angle formé par deux plans de chape devienne aigu ; il est quelquefois droit, mais ordinairement plus ou moins obtus. Ayant donc la table des poussées pour le cas de l'angle droit ; comme elles sont plus grandes pour cet angle que pour tout angle obtus, la table calculée indiquera des limites que la poussée ne pourra atteindre pour des angles I, supérieurs à 45°.

22. Dans le cas dont il s'agit, $I = 45°$, $\sin.I = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et la formule (1), relative à la rotation, devient

$$F = r^2 \frac{\sin.^2\alpha}{6(K - \cos.\alpha)} \left\{ K\sqrt{2} \left\{ 6 - 3K - (3 - 2K)\sin.(45° + \alpha) \right\} - \left(\frac{3\alpha}{\sin.\alpha} - \frac{1}{\cos.^2\frac{1}{2}\alpha} \right) \right\}$$

Celle de la poussée relative au glissement (2), de-

vient également pour $\alpha = 22°$, valeur qui correspond, à très-peu près, à son maximum,

$$G \text{ ou } \Pi = r^2(0{,}22340K^2 - 0{,}14999).$$

La table (C), à la fin de ce mémoire, est le résultat de ces deux formules en y mettant les différentes valeurs de K, et cherchant, pour la première, la valeur du maximum F par des tâtonnemens faits sur α. Nous la limitons aux valeurs de K, comprises entre $K = 2{,}00$ et $K = 1{,}10$; ce qui est plus que suffisant pour comprendre tous les cas de la pratique.

23. Il se présenterait, à la vue de cette table, des observations analogues à celles que nous a offertes la table (A), relative aux voûtes extradossées parallèlement. L'angle de rupture y suit une marche semblable; mais son maximum est plus petit, et ne dépasse pas 61°. Ce maximum correspond, à peu près, au même système de voûtes que quand l'extrados est parallèle, c'est-à-dire à celles dont le diamètre est 4 fois l'épaisseur ou environ, et pour lesquelles on a sensiblement $K = 1.50$. Les poussées horizontales relatives au glissement, l'emportent sur celles relatives à la rotation, jusqu'à la valeur $K = 1.43$ inclusivement. Pour $K = 1.42$ et les valeurs au-dessous, il faudra donc considérer le tableau qui contient ces premières poussées.

En comparant les valeurs des rapports de Π à r^2, dans les deux tables (A) et (C), on voit, de suite, que, pour les mêmes valeurs de K, ceux des voûtes extradossées en chape sont les plus grands. On conçoit, en effet, que, dans une voûte de ce genre, la poussée doit être plus grande que quand l'extrados est parallèle, à cause de

la surcharge ajoutée près de la clef, qui augmente la valeur de $\frac{P\varphi}{y}$. Cette augmentation est assez considérable : pour $K = 1{,}29$, la poussée est double dans les voûtes en chape ; pour les valeurs de K supérieures à 1,29, elle est un peu moindre que le double ; et, pour les valeurs de K inférieures à 1.29, elle est un peu plus grande.

24. Nous pouvons aussi comparer la poussée de la voûte du magasin de Vauban, dont la chape est inclinée à 49° 7′ 17″, avec celle qu'aurait la même voûte pour une chape inclinée à 45°. Dans le premier cas, elle était (19) : $\Pi = 3.78196$; dans le 2me, notre tableau donne, pour $K = 1.24$ et $r = 4^{m},0605$, $\Pi = 4{,}42703$.

Cette augmentation de poussée, due à quelques degrés de moins dans l'inclinaison de la chape, peut paraître considérable. On la comprendra cependant facilement en remarquant que, plus l'angle de la chape devient aigu, plus la quantité $\frac{P\varphi}{y}$ va en croissant, soit parce que la surface P augmente, soit parce que son centre de gravité se rapproche de la verticale de la clef, ce qui fait croître aussi la quantité φ.

25. Cherchons maintenant à résoudre, au moyen de la table (C), les deux questions générales, qui pour nous n'en font qu'une, déjà résolues (9 et 11) pour les voûtes extradossées parallèlement, c'est-à-dire à déterminer si une voûte donnée, extradossée en chape à 45°, pourra se soutenir sur ses naissances après le décintrement, et quelle est la plus petite épaisseur qu'elle puisse recevoir afin de ne pas s'écrouler. Figure 5.

Il faut comparer, comme précédemment, le moment de la demi-voûte AB*pqb*, pris relativement à l'arête

extérieure B de la naissance, avec celui de la poussée Π, appliquée en a, relativement à la même arête.

Ce dernier moment est $\Pi R = \Pi Kr = CKr^3$: il sera donc fourni immédiatement, pour chaque valeur de K, au moyen de la table (C) qui donne les coefficiens numériques C de r^3.

Le moment de la demi-voûte par rapport à B, sera donné par le théorème des momens, en considérant la surface ABpqb comme composée du grand triangle ODq, moins le petit triangle BDp et le secteur OAb, et l'on aura

$$(1{,}069035K^3 - \tfrac{1}{4}\pi K + \tfrac{1}{3})r^3.$$

Si l'on comprenait le petit triangle BDp dans la surface de la demi-voûte, ce qui serait favorable à la solidité, la formule du moment serait plus simple à établir et deviendrait

$$(1{,}057194K^3 - \tfrac{1}{4}\pi K + \tfrac{1}{3})r^3.$$

Ce moment étant un peu plus petit que le précédent, pour les mêmes valeurs de K, c'est celui que nous considérons pour le comparer au moment de la poussée. Or le résultat de cette comparaison montre que ce dernier est toujours, de beaucoup, inférieur au moment de stabilité de la demi-voûte (*) ; d'où il faut conclure qu'il n'en est pas des voûtes extradossées en chape, comme de celles extradossées parallèlement et que, quels que soient leur peu d'épaisseur et leur ouverture, elles resteront toujours stables, sur les naissances, après le décintrement.

(*) Valeurs de K.	Momens de stabilité.	Momens de la poussée.
1.20	1.21767 r^3.	0,309669 r^3.
1.10	0.87652 r^3.	0,256212 r^3.
1.05	0.73261 r^3.	0,242520 r^3.

Ainsi la même voûte qui s'écroulerait en laissant simplement l'extrados parallèle, deviendrait stable en la couvrant d'une maçonnerie en chape à 45°, parce que si la surcharge appliquée près de la clef de la voûte, augmente la poussée, elle augmente dans un bien plus grand rapport le moment de stabilité.

Au reste, en suivant la méthode de décintrer avant de terminer l'extrados, toutes les voûtes rentrent dans le cas de celles à extrados parallèle, et il faudra ne pas s'écarter de la limite de stabilité qui appartient à ce dernier genre de voûtes.

Épaisseur des Piédroits.

26. En négligeant, comme cela se fait ordinairement, le petit triangle formé par le prolongement de la chape, du plan des naissances et de la face extérieure du piédroit, ce qui est favorable à la solidité, on trouve, pour l'équation générale d'équilibre propre à calculer l'épaisseur e du piédroit, dans le cas d'une inclinaison quelconque I, de la chape,

$$\frac{1}{2}he^2+r^2\left(\frac{K^2}{\sin.2I}-\frac{1}{4}\pi\right)e+r^3\left(\frac{K^3}{\sin.2I}-\frac{K^3}{3\sin.2I\cos.I}-\frac{3\pi-4}{12}\right)=\Pi(Kr+h).$$

27. Pour l'inclinaison de 45°, la seule dont nous nous occupions en détail, elle devient, à cause de $\sin.2I=1$ et $\cos.I=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{1}{2}he^2+r^2\left(K^2-\frac{1}{4}\pi\right)e+r^3\left(K^2-\frac{1}{3}K^3\sqrt{2}-\frac{3\pi-4}{12}\right)=\Pi(Kr+h).$$

En résolvant cette équation, et y mettant Cr^2 au lieu de Π, C représentant les coefficiens numériques de r^2 donnés par la table (C), on obtient la formule suivante, analogue à celle (E) du n°. 13 :

$$\frac{e}{r}=\left(K^2-\frac{1}{4}\pi\right)\frac{r}{h}+\sqrt{\left(K^2-\frac{1}{4}\pi\right)^2\frac{r^2}{h^2}+2\left[K\left(C+\frac{1}{3}K^2\sqrt{2}-K\right)+0{,}452\right]\frac{r}{h}+2C}. \quad (E)$$

Au moyen de cette formule, on pourrait former, par la substitution des valeurs de K et de C, une table des valeurs de e exprimée en fonction de $\frac{r}{h}$ et de coefficiens numériques ; elle servirait, pour les voûtes extradossées en chape à 45°, comme la table (B) pour les voûtes extradossées parallèlement, et elle donnerait lieu aux mêmes observations que dans les n^os. 14 et 15.

Pour $h=\infty$, la formule (E') donne aussi $e=r\sqrt{2C}=\sqrt{2\Pi}$; ainsi le résultat, déjà énoncé (17) pour les voûtes extradossées parallèlement, a lieu également pour celles extradossées en chape ; et la limite de l'épaisseur des piédroits, quand leur hauteur devient infinie, est égale à la racine carrée du double de la poussée horizontale. Comme il arrive aussi que ces épaisseurs limites diffèrent assez peu de celles qui correspondent à des hauteurs ordinaires de piédroits, nous donnons dans les dernières colonnes du tableau (C), leurs rapports $\frac{e}{r}$ au rayon de l'intrados ; ce tableau pourra, jusqu'à un certain point, remplacer celui des formules complètes.

En calculant le moment de stabilité de la demi-voûte du magasin à poudre de Vauban, avec ses piédroits et contreforts, M. Audoy a trouvé (N°. 4 du *Mémorial*), que ce moment est double de celui de la poussée à la clef ; ce qui revient à doubler la valeur de Π, et à remplacer C par 2 C dans les équations ci-dessus. L'épaisseur limite, dans la même hypothèse,

devient $\sqrt{4\Pi} = 2r\sqrt{C}$, formule dont les valeurs se trouvent toutes calculées dans la table (C) (*).

§ IV.

VOÛTES EN PLEIN CINTRE, EXTRADOSSÉES HORIZONTALEMENT.

28. Il serait facile de former directement les expressions de la force horizontale, à la clef, relative, soit à la rotation, soit au glissement, comme nous l'avons fait pour les voûtes précédentes. Mais on arrive de suite à ces formules, en remarquant que l'extrados horizontal n'est qu'un cas particulier de la chape, celui où, l'angle d'inclinaison I, étant égal à 90°, on a sin.I = 1, cos.I = 0. En introduisant ces valeurs dans les formules générales des n^os. 18 et 20, relatives aux voûtes en chape, on obtient les deux suivantes pour les cas dont il s'agit :

$$F = \frac{r^2 \sin.^2\alpha}{6(K - \cos.\alpha)}\left\{K^2[6 - 3K - (3 - 2K)\cos.\alpha] - \left(\frac{3\alpha}{\sin.\alpha} - \frac{1}{\cos.^2\frac{1}{2}\alpha}\right)\right\}, \quad (1)$$

$$G = \frac{r^2 \sin.^2\alpha}{\text{tang.}(\alpha+\theta)}\left\{K^2\left(1 - \frac{1}{2}\cos.\alpha\right) - \frac{\alpha}{2\sin.\alpha}\right\}. \quad (2)$$

La formule (1) donnera, par des substitutions successives, les angles de rupture et les poussées relatives au cas de la rotation, en cherchant son maximum pour chaque valeur de K. La formule (2), relative au glissement, deviendra, en y mettant pour θ sa valeur 30°, et y introduisant $\alpha = 29°$, qui répond à un maximum,

$$G = r^2(0,16391K^2 - 0,15206).$$

(*) Voyez la *Note* II^e. à la fin de ce mémoire.

La table (D) est, en partie, le résultat de ces formules. On y voit que, pour les valeurs de K inférieures à 1,35, il faudra considérer les poussées dues à la rotation, puisqu'elles sont plus grandes : les poussées relatives au glissement l'emportent, au contraire, pour $K = 1{,}35$ et les valeurs au-dessus. On peut remarquer aussi que la marche de l'angle de rupture est ici différente de ce qu'elle était dans les tables précédentes, puisque cet angle va en augmentant constamment, à mesure que K diminue, ou que les voûtes ont plus d'ouverture à épaisseur égale.

29. En comparant les coefficiens ou rapports $C = \frac{n}{r^2}$ de la poussée au carré du rayon, donnés par cette table, à ceux de la table (A) relative à l'extrados parallèle, on remarque que, pour $K = 1{,}3$, ils sont les mêmes dans les deux tables; que, pour les valeurs de K supérieures à 1,3, ils sont plus grands dans les voûtes à extrados de niveau que dans celles à extrados parallèle; qu'enfin le contraire a lieu pour les valeurs de K, inférieures à 1,3. Ainsi, par exemple, la voûte de 1^m d'épaisseur et de $6^m,66$ de diamètre, a la même poussée horizontale, qu'elle soit extradossée de niveau ou parallèlement : si elle a un diamètre au-dessous de 6^m66, la poussée est plus grande pour l'extrados de niveau; et c'est le contraire si ce diamètre surpasse 6,66.

30. Cherchons maintenant à reconnaître la limite des voûtes qui peuvent se soutenir sur leurs naissances, et l'épaisseur minimum qu'on peut assigner aux voûtes extradossées horizontalement.

Il faut comparer, pour chaque valeur de K, le mo-

ment de la poussée avec celui de toute la demi-voûte pris, l'un et l'autre, relativement à l'arête extérieure du joint des naissances. Le premier est, en général, $nR = nKr = CKr^3$, C désignant toujours les coefficiens ou rapports numériques de la table des poussées; le second est donné par l'expression $(\frac{1}{3}K^3 - \frac{1}{4}\pi K + \frac{1}{3})r^3$.

En comparant ces deux espèces de momens, on reconnaît que celui de la poussée devient le plus grand pour la valeur $K = 1{,}04$; et on aura une limite plus précise par des interpolations entre $K = 1{,}05$ et $K = 1{,}04$; d'où résultera le tableau suivant.

VALEURS de K.	RAPPORT du diamètre à l'épaisseur.	MOMENT de stabilité de la demi-voûte sur sa naissance.	MOMENT de la poussée horizontale.
1.050	40.000	$0{,}087524\,r^3$	$0{,}085483\,r^3$
1.045		$0{,}083196\,r^3$	$0{,}082875\,r^3$
1.044		$0{,}082231\,r^3$	$0{,}082272\,r^3$
1.0435	45.997	$0{,}081906\,r^3$	$0{,}081977\,r^3$
1.043		$0{,}081497\,r^3$	$0{,}081693\,r^3$
1.042		$0{,}080637\,r^3$	$0{,}081105\,r^3$
1.041		$0{,}079797\,r^3$	$0{,}080517\,r^3$
1.040	50.600	$0{,}078978\,r^3$	$0{,}079931\,r^3$

On voit que les valeurs des deux momens sont à très-peu-près égales pour $K = 1{,}0435$; c'est donc la limite inférieure des valeurs, de K, qui répondent à des systèmes de voûtes pouvant se soutenir sur leurs naissances. Les voûtes correspondantes à la limite elle-même, c'est-à-dire, qui sont en équilibre strict sur leurs naissances, sont celles dont le diamètre est égal à 46 fois l'épaisseur environ.

La connaissance de la limite $K = 1{,}0435$, apprendra facilement quelle est la moindre épaisseur qu'on puisse

donner à une voûte en plein cintre, extradossée de niveau, dont le rayon r est donné. Il suffira de poser $\frac{R}{r} = 1{,}0435$; d'où l'on tirera R, et, par suite, $R - r$ ou l'épaisseur cherchée $= 0{,}0435\, r$. Ainsi, par exemple, pour la voûte de 20^m de diamètre, $r = 10^m$, et l'on a $R - r = 0^m{,}435$: c'est l'épaisseur minimum de la voûte.

Épaisseur des Piédroits.

31. L'équation d'équilibre sera, pour les voûtes dont il s'agit,

$$\tfrac{1}{2}(h+R)e^2 + (Rr - \tfrac{1}{4}\pi r^2)e + \tfrac{1}{2}Rr^2 - \frac{3\pi-4}{12}r^3 = \Pi(R+h).$$

En y mettant pour R sa valeur Kr, pour Π sa valeur Cr^2, et résolvant l'équation, on a la formule

$$\frac{e}{r} = -\left(K - \frac{1}{4}\pi\right)\frac{r}{h+Kr} + \sqrt{\left(K-\frac{1}{4}\pi\right)^2\left(\frac{r}{h+Kr}\right)^2 + \left(2KC - K + \frac{3\pi-4}{6}\right)\frac{r}{h+Kr} + 2C\frac{h}{h+Kr}}. \quad (E'')$$

Cette formule donne les épaisseurs des piédroits des voûtes, en plein cintre, extradossées de niveau, dans le cas de l'équilibre strict : elle donnera les épaisseurs pratiques, ou la stabilité des voûtes de Lahire, en y mettant $1{,}90\,C$ au lieu de C.

32. Remarquons encore que la fraction $\frac{h}{h+Kr}$, qui multiplie le terme $2C$ sous le radical, converge rapidement vers l'unité, à mesure que h augmente, et atteint cette limite quand h devient infini; auquel cas, tous les autres termes disparaissant, la valeur de e se trouve réduite à $e = r\sqrt{2C}$; d'où l'on conclut que, pour les voûtes extradossées de niveau, comme pour les précédentes, la limite de l'épaisseur des pié-

droits, quand leur hauteur devient infinie, est *égale à la racine carrée du double de la poussée horizontale.*

La limite des épaisseurs pratiques sera donnée par la formule $e = \sqrt{3.8}\,.\,\Pi$ Les dernières colonnes de la table (D), qui renferme les limites des épaisseurs théoriques et pratiques, ont été calculées d'après ces deux formules et la connaissance des poussées Π fournies par les colonnes 4 et 5. Nous pensons que les épaisseurs qu'elles donnent pourront dispenser, dans bien des cas, de recourir à la formule générale (E''), qui est encore moins simple que les formules (E) et (E'), et ne permettrait pas de former une table générale des épaissenrs de piédroits pour toutes les voûtes possibles, comme celle que nous avons indiquée pour les voûtes extradossées parallèlement et en chape, n° 15 (*Voy.* la *Note* III°.)

§ V.

VOÛTES EN ARC DE CERCLE.

Voûtes en arc de cercle extradossées parallèlement.

33. Les données, pour les voûtes en arc de cercle, comprennent ordinairement, en outre de l'épaisseur de ces voûtes, leur ouverture AB, que nous désignerons par L, et leur flèche ou montée *bd*, que nous appellerons *f*. Figure 7.

Pour exprimer, au moyen de ces données, le rayon r de l'intrados et le demi-angle au centre α, on a les deux formules

$$r = \frac{f}{2}\left(\frac{1}{4}\frac{L^2}{f^2} + 1\right), \qquad \sin.\,\alpha = \frac{\frac{L}{f}}{\frac{1}{4}\frac{L^2}{f^2} + 1},$$

Quand l'ouverture et l'angle au centre seront donnés avec l'épaisseur de la voûte, on calculera r et f par les deux relations

$$r = \frac{L}{2 \sin. a}, \quad f = r(1 - \cos. a).$$

Ayant déterminé les rayons r et R de l'intrados et de l'extrados, ainsi que leur rapport $\frac{R}{r} = K$, on cherchera, dans la table (A), quel est l'angle de rupture qui appartient au système de voûtes semblables à la proposée. En comparant cet angle avec le demi-angle au centre a, de celle-ci, il pourra arriver deux cas, suivant que ce demi-angle au centre sera plus grand ou plus petit que l'angle de rupture.

34. *Premier cas.* Si le demi-angle au centre AOb, est plus grand que l'angle de rupture donné par la table (A), le joint de rupture se trouvera entre A et b; la voûte devra donc être considérée, relativement à la poussée horizontale, comme voûte en plein cintre, et sa poussée sera immédiatement connue par la table. Mais il faudra se servir d'une nouvelle équation d'équilibre, qu'on obtiendra en égalant le moment de la poussée horizontale relative au point D, à la somme des momens de la portion de couronne Amab et du rectangle ACDE, par rapport au même point (*); ce qui donnera

(*) Nous avons négligé, dans le moment du piédroit, celui du trapèze ACnm, ordinairement peu considérable; ce qui, tout en simplifiant la formule, est d'ailleurs en faveur de la solidité. Il est facile d'avoir l'équation d'équilibre exacte, en y faisant entrer le moment du rectangle DEcn, dont on retranchera celui du petit triangle Amc.

$$\frac{1}{2}h e^2 + \frac{1}{2}a(R^2-r^2)e + \frac{1}{2}a(R^2-r^2)r\sin.a - \frac{1}{3}(R^3-r^3)(1-\cos.a) =$$
$$= \Pi(R+h-r\cos.a).$$

En introduisant K, ainsi que la valeur de $\Pi = r^2 C$, et résolvant l'équation, on en déduit la formule suivante pour calculer l'épaisseur des piédroits des voûtes en arc de cercle, extradossées parallèlement :

$$\frac{e}{r} = \frac{1}{2}a(K^2-1)\frac{r}{h} +$$

$$\frac{a^2(K^2-1)}{2}\frac{r^2}{h^2} + 2\left\{C(K-\cos.a) + \frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos.a) - \frac{1}{2}(K^2-1)a\sin.a\right\}\frac{r}{h} + 2C. \quad (E''')$$

Cette formule est analogue à celle des voûtes en plein cintre de même extrados, et elle assigne également une limite d'épaisseur pour le piédroit dont la hauteur devient infinie; limite qui est toujours égale à la racine carrée du double de la poussée horizontale.

La formule (E''') suffira seule, pour toutes les applications des voûtes, en arc de cercle, qui appartiennent au premier cas, puisqu'il n'y a point de poussées à calculer, et que les valeurs de C sont données par la table (A) déjà dressée.

35. *Deuxième cas.* Si le demi-angle au centre est moindre que l'angle de rupture de la voûte proposée, considérée comme en plein cintre, ce qui a lieu le plus ordinairement pour les voûtes en arc de cercle usitées dans la pratique, alors la rupture se fera à la naissance même, et l'on obtiendra, sans tâtonnemens, les valeurs de la poussée dans le cas de rotation et de glissement; valeurs dont on prendra la plus considérable pour la véritable poussée de la voûte.

La poussée relative à la rotation sera donnée par la formule

$$C=\frac{\Pi}{f^2}=\frac{\frac{1}{2}(K^2-1)a\ \sin.a-\frac{1}{3}(K^2-1)\ (1-\cos.a)}{K-\cos.a}, \qquad (1)$$

qui exprime la force horizontale, à la clef, relative à un joint faisant l'angle a avec la verticale (2). En y substituant les valeurs de a, $\sin.a$ et $\cos.a$, qui résulteront de la connaissance de l'angle a ou du rapport $\frac{L}{f}$, il en résultera une formule qui donnera immédiatement une table des poussées horizontales, pour tous les systèmes de voûtes semblables correspondant aux différentes valeurs de K et de $\frac{L}{f}$.

36. Nous avons calculé une portion de cette table en limitant le nombre des valeurs de $\frac{L}{f}$ à sept, qui comprennent les voûtes les plus usitées. Ces sept systèmes sont ceux pour lesquels la flèche est la 4e, la 5e, la 6e, la 7e, la 8e, la 10e et la 16e partie de l'ouverture. En calculant les autres données qui se déduisent de la connaissance du rapport $\frac{L}{f}$, on trouve, pour

$L=4f$, $\sin.a=0.800000$, $a=53°\ 7'\ 30''$, $r=\frac{5}{4}f$,
$L=5f$, $\sin.a=0,689655$, $a=43°\ 36'\ 10''$, $r=\frac{29}{8}f$,
$L=6f$, $\sin.a=0,600000$, $a=36°\ 52'\ 10''$, $r=5f$,
$L=7f$, $\sin.a=0,528300$, $a=31°\ 53'\ 26''$, $r=\frac{53}{8}f$,
$L=8f$, $\sin.a=0,470588$, $a=28°\ 4'\ 20''$, $r=\frac{17}{2}f$,
$L=10f$, $\sin.a=0,384615$, $a=22°\ 37'\ 10''$, $r=13f$,
$L=16f$, $\sin.a=0,246154$, $a=14°\ 15'\ 0''$, $r=32.5f$.

Ces données et la formule (1) du numéro précé-

dent ont servi à calculer une partie des sept colonnes de la table (E); l'autre partie comprend les poussées relatives au glissement, quand elles deviennent les plus fortes : voici comment elles ont été calculées.

37. Dans les voûtes en plein cintre, extradossées parallèlement, ces dernières poussées sont données par le maximum de l'expression

$$G=\frac{1}{2}r^2(K^2-1)\frac{\alpha}{\text{tang.}(\alpha+30^\circ.)}, \quad (2)$$

maximum qui correspond à la valeur $\alpha=26^\circ$, pour laquelle on a

$$\Pi=0,153o4\,(K^2-1)\,r^2.$$

Si donc, pour les voûtes en arc de cercle, le demi-angle au centre surpasse 26°, les poussées horizontales dues au glissement, devront être calculées par cette formule, et leur suite se trouve déjà dans la table (A).

Si le demi-angle au centre est moindre que 26°, on mettra sa valeur dans la formule générale (2), à la place de α, et on aura la valeur de la poussée due au glissement sur le joint de naissance.

Ainsi, pour les voûtes en arc de cercle des systèmes $L=4f$, $L=5f$, $L=6f$, $L=7f$, $L=8f$, dont le demi-angle au centre dépasse 26°, on comparera les valeurs, dues à la rotation, à celles dues au glissement, qui, dans la table (A), correspondent aux mêmes valeurs de K, et on abandonnera les premières quand elles deviendront les plus petites. C'est ce que nous avons fait, et une barre horizontale indique, dans chaque colonne de la table (E), l'instant où l'on doit commencer à considérer les poussées dues au glisse-

ment, qui ne sont que la reproduction de celles de la table (A).

Pour les deux derniers systèmes $L = 10f$, $L = 16f$, le demi-angle au centre est plus petit que 26°, il faut donc calculer directement les poussées relatives au glissement, sous l'angle de 22° 37′ 10″ pour le premier, et sous l'angle de 14° 15′ pour le second : ces poussées seront plus petites que celles qui se rapportent à l'angle de 26°, donnant le maximum, et on aura

$$H = 0,15082\,(K^2-1)r^2, \text{ pour le système } L = 10f.$$
$$H = 0,12765\,(K^2-1)r^2, \text{ pour le système } L = 16f.$$

38. En introduisant, dans la table (E), les valeurs entières du rapport $\frac{L}{f}$ qui y manquent, et intercalant quelques valeurs intermédiaires entre celles-là, afin de rendre plus exactes les interpolations qui resteraient à faire pour certaines données, on aurait un tableau complet des poussées horizontales dans les voûtes, en arc de cercle, extradossées parallèlement. La valeur du rapport $\frac{L}{f}$ indiquerait la colonne verticale, et le rapport $K = \frac{R}{r}$ la colonne horizontale, à l'intersection desquelles se trouverait la poussée de toute voûte donnée. Notre table (E) comprend, au reste, presque tous les systèmes de voûtes usités dans la pratique.

39. L'équation d'équilibre est la même que dans le premier cas, et la formule (E‴), du n°. 34, donnera les épaisseurs théoriques des piédroits de toutes les voûtes en arc de cercle, à extrados parallèle ; seulement, dans le deuxième cas, les valeurs de C seront

fournies par la table (E), au lieu qu'elles l'étaient par la table (A) dans le premier. Pour obtenir des épaisseurs pratiques, il serait nécessaire de connaître un coefficient de stabilité, qui ne paraît pas devoir être exactement le même que pour les voûtes en plein cintre. Il faudrait, pour le déterminer, comparer les résultats des formules à quelques exemples de voûtes de différens systèmes, qui aient offert toute la stabilité désirable. L'expérience doit donc encore ici venir au secours de la théorie, et cette détermination doit être laissée aux constructeurs exercés. On pourra, en attendant, faire usage du coefficient 1.90, employé pour les voûtes en plein cintre.

Remarquons que la formule (E'''), résolue pour chaque système de voûtes, permettrait de former un tableau général, analogue à celui qui est indiqué au n°. 15, des épaisseurs de piédroits pour toutes les voûtes en arc de cercle, dont on aurait le rapport $\frac{r}{h}$ et le rapport $K = \frac{R}{r}$. A défaut de ce tableau, on pourrait en dresser un des limites des épaisseurs répondant à une hauteur de piédroits infinie; mais nous avons jugé inutile de l'entreprendre, attendu que les épaisseurs purement théoriques auxquelles il eût fallu se borner, se seraient ici, pour les hauteurs ordinaires de piédroits, beaucoup trop écartées des épaisseurs véritables, soit théoriques, soit pratiques.

4o. Il nous reste à résoudre, pour les voûtes en arc de cercle, la question concernant la stabilité sur les naissances, et qui consiste à s'assurer si une pareille voûte s'écroulera, après le décintrement, par l'effet de sa propre poussée, qui forcerait sa moitié *Amab* Figure 7.

à tourner autour de l'arête extérieure m, du joint de naissance.

Le moment de la surface $Amab$, pris relativement au point m, est donné, en général, par l'expression

$$\left\{\frac{1}{2}K(K^3-1)a\sin.a-\frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos.a)\right\}r^3.$$

Celui de la poussée horizontale appliquée à l'extrados de la clef, pris relativement au même point, est, en général,

$$KC(1-\cos.a)r^3.$$

En comparant les momens donnés par ces deux formules, pour chacun des systèmes de voûtes que nous avons traités, on trouve que, dans tous, le moment de stabilité de la demi-voûte l'emporte constamment sur celui de la poussée, et que l'excès est d'autant plus grand que l'arc est plus surbaissé. Ainsi, pour les voûtes du système $\frac{L}{f}=4$, et tous les systèmes plus surbaissés, il n'y aura jamais écroulement après le décintrement, et, par suite, point de limite minimum pour l'épaisseur à donner à ces voûtes. Pour les voûtes des systèmes qui se rapprocheraient plus du plein cintre, il pourrait y avoir, et il y aurait, en général, une limite minimum d'épaisseur, laquelle, au reste, correspondrait à des dimensions de voûtes tout-à-fait hors de la pratique.

Glissement des voûtes en arc de cercle, vers leurs naissances.

41. Les voûtes en plein cintre n'éprouvent jamais de glissement vers leurs naissances; mais il en est autrement de celles en arc de cercle. Nous nous propo-

sons ici de déterminer, à l'aide de la table (E) et pour chacun des systèmes qu'elle concerne, les limites qui séparent entre elles les voûtes susceptibles ou non de glisser.

La poussée tendant à opérer le glissement de la maçonnerie sur la partie du piédroit AC, voisine de la naissance, est connue en fonction de r, par la table (E). Quant au frottement qui s'oppose à ce glissement sur la section horizontale AC du piédroit, il a pour valeur $0{,}38\,a(K^2-1)r^2$, attendu que $\frac{1}{2}a(R^2-r^2) = \frac{1}{2}a(K^2-1)r^2$ représente, au petit trapèze AC*nm* près, le poids de la partie AC*nmab* du profil, et que nous prenons ici, d'après M. Boistard, le coefficient du frottement égal à 0,76, afin de tenir compte des inégalités qu'on laisse ordinairement, à dessein, dans l'exécution des assises du piédroit. Figure 7.

En comparant les différentes valeurs de l'expression $0{,}38a(K^2-1)r^2$ du frottement, à celles de la poussée qui leur correspondent dans la table (E), on est conduit aux résultats suivans.

Pour le sytème $L=4f$, la poussée surpasse le frottement quand $K=1{,}06$; il y aura donc glissement dans les voûtes qui correspondent à cette valeur de K et à des valeurs plus petites.

Pour les systèmes $L=5f$, $L=6f$, $L=7f$, $L=8f$ et $L=10f$, le glissement commence à la valeur $K=1.15$.

Pour le système $L=16f$, et tous les systèmes plus surbaissés, le glissement a lieu quelle que soit l'épaisseur de la voûte.

On a donc, *à priori*, les limites au-delà desquelles on devra employer des moyens d'art pour empêcher les voûtes extradossées parallèlement, de glisser sur

les assises supérieures de leurs piédroits ; et il est à remarquer que ce glissement n'aurait généralement pas lieu pour les voûtes qui atteindraient ces limites, ou qui les dépasseraient même un peu, à cause du poids de la partie A C nm, que nous avons négligé, et qui augmenterait la résistance du frottement. Néanmoins il convient de considérer ces limites comme exactes, puisqu'on sera ainsi conduit à ne projeter que des voûtes possédant déjà, en partie, l'excès de stabilité qu'on doit toujours se proposer d'obtenir (*Voy.* les *Notes* IV[b] et V[c]).

Voûtes en arc de cercle, extradossées en chape.

42. Tout ce que nous venons de dire relativement aux voûtes, en arc de cercle, extradossées parallèlement, s'applique aussi à celles extradossées en chape ; et cela permettrait de calculer, pour les inclinaisons de chape, I, les plus usitées dans la pratique, une table de poussées analogue à la table (E), si l'on avait déjà exécuté le calcul des voûtes en plein cintre, avec les mêmes inclinaisons de chape, ainsi que nous l'avons fait pour une seule, celle de 45°.

Figure 8. Il resterait ensuite à établir l'équation d'équilibre donnant l'épaisseur e du piédroit. En désignant par H la hauteur Cm, et par L le double de AC, on trouvera, pour cette équation,

$$he^2+\left(H^2\operatorname{tang}.I+\frac{1}{2}Lr\cos.a-r^2a\right)e+H^2\operatorname{tang}.I\left(\frac{1}{2}L-\frac{1}{3}H\operatorname{tang}.I\right)+$$

$$+L\left(\frac{1}{6}Lr\cos.a-\frac{1}{2}r^2a\right)+\frac{2}{3}r^3(1-\cos.a)=2\Pi(R+h-r\cos.a),$$

En y remplaçant H et L par leurs valeurs $\frac{R}{\sin.I}-r\cos.a$, $2r\cos.a$, et la résolvant ensuite par

rapport à $\frac{e}{r}$, on obtiendra une formule analogue à (E''), exprimée seulement en fonction de K, de I, du demi-angle au centre a, et du rapport $\frac{r}{h}$, etc.

43. En attendant que le travail complet dont nous venons de parler soit exécuté, voici comment on procédera au calcul direct de chaque voûte dont les rayons R et r sont donnés ainsi que l'angle I et le rapport $K = \frac{R}{r}$. On cherchera l'angle α qui rend un maximum l'expression (1) du n°. 18 : s'il est moindre que le demi-angle au centre a, ce sera l'angle de rupture, et la valeur correspondante de F, sera celle de la poussée horizontale H.

Si l'angle α, qui rend F un maximum, surpasse le demi-angle au centre a, la poussée s'obtiendra en mettant a au lieu de α dans la formule. Ce sera le cas ordinaire des voûtes en arc de cercle : on le distinguera en général, *à priori*, d'après la connaissance approximative de l'angle de rupture ; ce qui dispensera, le plus souvent, de tout tâtonnement pour trouver la poussée horizontale due à la rotation.

Ensuite, on cherchera le maximum de l'expression (2) du n°. 20, qui donnera la poussée dans le cas du glissement. Si sa valeur surpasse celle qui se rapporte à la rotation, c'est elle qu'on choisira pour la véritable poussée, et qu'on introduira, avec les autres données, dans l'équation d'équilibre du n°. 42, servant à déterminer l'épaisseur théorique des piédroits, et qui fournira l'épaisseur pratique en y doublant, par exemple, la valeur de H.

Quant aux autres questions relatives au maximum

d'épaisseur de la voûte, à sa stabilité sur les naissances et à son glissement sur l'assise supérieure des piédroits, il faudra, à défaut de tables, les traiter directement dans chaque cas.

Voûtes en arc de cercle, extradossées horizontalement.

44. Le tableau des poussées de voûtes en plein cintre, extradossées horizontalement, étant déjà établi, table (D), il restera à former la table analogue à (E), pour avoir les poussées des différens systèmes de voûtes, en arc de cercle, extradossées de la même manière. C'est à quoi on parviendrait au moyen des formules générales (1) et (2) du n° 28. On formerait ensuite l'équation d'équilibre qui donne l'épaisseur du piédroit, etc.

Le calcul des tables dont il s'agit n'étant point exécuté, il faudra, dans chaque cas, procéder directement comme nous l'avons indiqué au n° 43, en se servant, pour obtenir l'épaisseur des piédroits, de l'équation d'équilibre :

$$(R+h-r\cos.a)\,e^2+\left(LR-\frac{1}{2}L\,r\cos.a-r^2a\right)e+L^2\left(\frac{1}{4}R-\frac{1}{12}r\cos.a\right)$$
$$-\frac{1}{2}Lr^2a+\frac{2}{3}r^3(1-\cos.a)=2\Pi(R+h-r\cos.a).$$

Observation générale sur le calcul des voûtes.

45. Le travail qui reste à faire pour compléter l'application de la théorie au calcul pratique des voûtes circulaires, consiste surtout dans la formation des tableaux numériques que nous avons indiqués, et dont nous avons calculé une partie. Ce travail et les opérations que comporte l'application des formules à

chaque exemple particulier, seront considérablement facilités et simplifiés, si l'on a calculé, à l'avance, les principales fonctions qui entrent dans ces formules et leurs logarithmes. Dans la vue de rendre un pareil service à ceux qui voudraient faire des applications isolées, ou compléter nos tables générales de poussées, etc., nous avions joint, à ce Mémoire, quatre tables auxiliaires qui nous ont été d'un grand secours, et que le manque d'espace a fait supprimer dans l'impression (*).

§ VI.

DES SURCHARGES AU-DESSUS DES VOÛTES.

46. Considérons d'abord une voûte en plein cintre, extradossée parallèlement, chargée d'une couche de terre, terminée horizontalement et dont la hauteur, au-dessus de la clé, soit $aq = l$. Dans cette hypothèse, toutes les circonstances déjà étudiées changeront: ainsi l'angle de rupture et la poussée horizontale seront différens de ce qu'ils étaient pour la voûte simple, et il faudra un nouveau calcul pour les obtenir. Figure 9.

Il est clair que, dans l'expression générale de la force horizontale à la clef, du n° 2, pour la voûte simple, il faudra ajouter un terme résultant du moment du profil *anrpq*, pris aussi relativement à l'intrados *m* du joint de rupture, en ayant soin de multiplier la surface de ce profil par le rapport de la densité de la terre à celle de la maçonnerie.

Mais, comme ce terme est beaucoup trop compliqué

(*) Ces tables formaient double emploi avec celles de M. le capitaine de Garidel, rapportées ci-devant. (*Note du rédacteur.*)

pour qu'on puisse l'employer dans la pratique, et afin de reconnaître néanmoins quelle influence la surcharge exerce sur la poussée, nous supposerons, pour le cas dont il s'agit, que, jusqu'à l'horizontale ar, la terre ait même densité que la maçonnerie, ce qui ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité. Au moyen de cette simplification, la voûte rentrant dans la classe de celles qui sont extradossées de niveau et surchargées d'une couche d'égale épaisseur aq, nous n'aurons à examiner que le cas des extrados en chape et de niveau.

47. Remarquons maintenant que, soit qu'il s'agisse d'une voûte extradossée de niveau suivant ar, et chargée d'une couche horizontale $aq = l$, ou d'une
Figure 10. voûte ayant une chape d'une inclinaison quelconque pr, et chargée d'une couche parallèle à cette chape, ayant la même épaisseur verticale l, l'expression du moment de cette couche, pris relativement à l'arête d'intrados m, sera unique et applicable aux deux cas. En effet, si on désigne par γ le rapport de la densité de la terre à celle de la maçonnerie, le moment du rectangle $aqpr$ (*Fig.* 9), ou du parallélogramme $pqsr$ (*Fig.* 10), aura pour expression (*)

$$\gamma \frac{r^2}{2} \mathrm{K} l \sin.^2\alpha (2 - \mathrm{K});$$

de sorte que la valeur générale de la force horizontale à la clef sera

(*) La surface du parallélogramme ou du rectangle est égale à $l\,\mathrm{R} \sin.\alpha$; la distance de son centre de gravité G, au point m, ou $mg = r \sin.\alpha - \frac{1}{2}\,\mathrm{R} \sin.\alpha$: donc son moment est exprimé par $\frac{r^2}{2} \mathrm{K} l \sin.^2\alpha (2 - \mathrm{K})$.

$$F=\frac{P_\varphi+\gamma\frac{r^2}{2}Kl\sin.^2\alpha(2-K)}{\gamma}$$

ou, en divisant chaque terme séparément par $\gamma = r(K-\cos.\alpha)$:

$$F=\frac{P_\varphi}{\gamma}+\frac{r}{2}\frac{\gamma Kl\sin.^2\alpha(2-K)}{K-\cos.\alpha};$$

$\frac{P_\varphi}{\gamma}$ ayant la valeur générale (2) du n° 18, qui devient celle du n° 28 pour les voûtes extradossées horizontalement.

On mettra, dans cette formule, la valeur donnée de l, et celle, de γ, qu'on suppose ordinairement égale à $\frac{2}{3}$; puis on cherchera, par des substitutions, la valeur de l'angle α qui répond au maximum de F, afin d'obtenir l'angle de rupture et la poussée.

Par exemple, s'il s'agit d'une chape inclinée à 45°, la valeur de cette poussée sera donnée par le maximum de l'expression suivante (n°. 22) :

$$F=\frac{r^2\sin.^2\alpha}{6(K-\cos.\alpha)}\left\{K^2\sqrt{2}[6-3K-(3-2K)\sin.(45^\circ+\alpha)]-\frac{3\alpha}{\sin.\alpha}-\frac{1}{\cos.^2\frac{1}{2}\alpha}\right\}+$$
$$+\frac{r\gamma Kl\sin.^2\alpha(2-K)}{2(K-\cos.\alpha)}.$$

48. Le terme relatif à la surcharge devenant nul, en général, pour $K=2$, c'est-à-dire, pour les voûtes dont le diamètre est égal à deux fois l'épaisseur, on voit que cette surcharge ne change rien aux circonstances de la voûte simple. C'est ce qu'on pourrait reconnaître, *à priori*, en cherchant pour quel système de voûtes la verticale du centre de gravité du rectangle ou parallélogramme *apqr*, passe par le point *m*. Pour les voûtes dans lesquelles le rapport K est plus grand

Figure 11.

que 2, le terme relatif à la surcharge devient négatif; elle diminue donc la poussée, et, en effet, la verticale de son centre de gravité tombe à l'extérieur du point m. Mais ce terme est positif pour la plupart des voûtes usuelles.

Le rapport $K = 2$ correspond notamment aux voûtes des galeries de mines, qui ont ordinairement 1^m de diamètre, et $0^m,50$ d'épaisseur. Ainsi, pour ces voûtes et toutes les semblables, la surcharge de terre, quelle que soit sa hauteur, n'augmente pas la poussée horizontale.

49. En général, les surcharges sont loin de faire croître la poussée, et par conséquent l'épaisseur des piédroits, dans la proportion de leur hauteur ou de leur poids, d'autant plus qu'elles contribuent aussi à augmenter la stabilité des parties inférieures de la voûte. En effet, pour le cas de l'extrados horizontal, il faudra ajouter, à la somme des momens de l'équation
Figure 12. d'équilibre du n°. 31, celui du rectangle $a\,E\,F\,q$ pris relativement au point D; or sa surface ou son poids est $\gamma(r+e)l$, et la distance horizontale de son centre de gravité au point D, est $\frac{1}{2}(r+e)$; ce qui donne, pour le moment à ajouter à ceux des résistances que renferme le premier membre de l'équation dont il s'agit,

$$\tfrac{1}{2}\gamma l(r+e)^2;$$

quantité considérable, et qui tend à diminuer de beaucoup l'épaisseur e du piédroit, qui se déduit de cette équation.

Figure 13. Pour les voûtes en chape, le moment de la surcharge, relativement à l'arête extérieure du piédroit, et qu'il faudra ajouter au premier membre de l'équa-

tion d'équilibre du n° 27, a pour expression

$$\frac{1}{2}\gamma l\frac{(r+e)^2}{\sin.I};$$

valeur qui donne celle de l'extrados horizontal, quand on suppose $\sin.I = 1$.

Voûtes surchargées d'une couche de sable.

50. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé, comme on l'a admis jusqu'ici, que, quelle que fût l'épaisseur l de la surcharge, cette couche pressait, de tout son poids, la maçonnerie de la voûte. Or, quand la hauteur aq devient un peu grande, l'augmentation de poussée qu'on obtiendrait en ajoutant, au moment de la partie *mnrab* autour du point m, celui de tout le rectangle $arpq$, serait beaucoup trop forte; de même qu'en faisant entrer, dans l'équation d'équilibre, le moment du rectangle total aEFq, on arriverait à un résultat très-inexact. Pour nous en convaincre, nous examinerons ce qui se passerait dans le cas d'une surcharge de sable; et, comme tous les remblais doivent participer, plus ou moins, des propriétés qu'on vient d'y découvrir, nous aurons une idée approchée des effets qui auront lieu avec les remblais ordinaires. Figure 12.

51. Considérons d'abord la voûte à extrados horizontal, surchargée d'une couche de sable d'une hauteur indéfinie. Il résulte, des curieuses expériences rapportées dans le n°. 11 du *Mémorial*, qu'elle ne produirait, sur la base horizontale aE, qu'une pression qui ne dépasserait guère le poids de la partie aEG enlevée par un plan faisant un angle de 30 à 33°, avec le plan horizontal : le reste de la masse de sable n'exercerait que des pressions latérales contre EF, qui ici sera censé Figure 12.

appartenir à un vaste remblai non supporté par la voûte. D'après cette propriété, pour faire le calcul de la poussée, il suffirait d'ajouter, au moment P_φ de la partie *mnrab*, celui du triangle *arH*, dont l'angle *arH* est donné par l'expérience, et que nous désignons par m. La surface de ce triangle est $\frac{1}{2}R^2 \sin.^3\alpha \tang.m$; la distance horizontale de son centre de gravité au point m, est égale à $\frac{2}{3}r \sin.\alpha(3-K)$; donc le moment à ajouter à P_φ, est

$$\tfrac{1}{6}r^3\gamma K^3(3-K)\sin.^3\alpha \tang.m.$$

En ajoutant ce terme au numérateur de l'expression du n°. 28, et observant que le dénominateur γ est égal à $r(K-\cos.\alpha)$, on aura enfin, pour l'expression générale de la force horizontale à la clef, dans une voûte extradossée horizontalement et chargée d'une couche de sable d'une hauteur indéfinie,

$$F=\frac{r^2\sin.^2\alpha}{6(K-\cos.\alpha)}\left\{K^2[6-3K-(3-2K)\cos.\alpha]-\left(\frac{3\alpha}{\sin.\alpha}-\frac{1}{\cos.^2\frac{1}{2}\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\gamma K^3(3-K)\sin.\alpha \tang.m\right\};$$

son maximum, pris en faisant varier α, sera la valeur de la poussée.

52. Il est remarquable que cette expression a la même forme que pour les voûtes simples, et permet d'en tirer les mêmes conclusions générales. Ainsi : l'angle de rupture sera le même pour toutes les voûtes semblables ; les poussées horizontales de ces voûtes seront proportionnelles aux carrés de leurs rayons d'intrados, et on pourra calculer un tableau, *à priori*, des poussées pour toutes les voûtes possibles avec surcharge, comme nous l'avons fait pour les voûtes simples, etc.

Le terme ajouté s'évanouit pour $K = 3$; et il est aisé de reconnaître directement que le centre de gravité du triangle arH tombera dans la verticale du point m, si le rayon r est le tiers du rayon R; ce qui donne $R = 3r$ et $K = 3$.

Pour former l'équation d'équilibre dans le cas dont il s'agit, il suffit d'ajouter, au moment de la demi-voûte (31), celui du triangle aEG, qui est égal à $\frac{1}{6}\gamma\,(r+e)^3 \tang.m$; ce qui fera malheureusement dépendre l'épaisseur du piédroit d'une équation du troisième degré.

53. Examinons, à présent, les surcharges des voûtes en chape, dans la même hypothèse. Prenons d'abord le cas où l'angle, I, d'inclinaison de la chape aE avec la verticale, serait juste le complément de l'angle m, qui est celui de l'arc-boutement des molécules de sable, c'est-à-dire de 57 à 60°. En admettant que l'effet d'arc-boutement se produise complètement, ce qui a lieu à peu près, il s'ensuivrait que la surcharge, quelles que fussent sa hauteur et la ligne qF qui la termine, n'augmenterait pas la poussée et ne changerait absolument rien aux circonstances de la voûte simple. Figure 13.

Cela suppose, je le répète, la voûte entièrement enveloppée d'un remblai qui recevra l'effet des pressions latérales de la masse $aEFq$. Mais, si la voûte couvre un bâtiment isolé, et que la couche de sable soit soutenue, sur l'extrados, par un petit mur $EFfe$, situé dans le prolongement de la face extérieure du piédroit, alors, quoique la surcharge continue à n'exercer aucune influence directe sur la poussée, elle en a cependant une sur la stabilité de la voûte, et produit le même effet qu'une augmentation de poussée. En

effet, il faudra ajouter, au moment de cette poussée appliquée à l'extrados de la clef, celui d'une force, aussi horizontale, appliquée en un certain point t qui se trouve quelque part entre le tiers et le milieu de la hauteur ef; son intensité sera égale au poids de la partie de la surcharge non directement soutenue par la voûte, c'est-à-dire à γs, s désignant sa surface. En observant donc que son bras de levier est égal à la hauteur Dt', il sera facile d'introduire son moment dans l'équation d'équilibre.

Ce que nous avons dit précédemment aura lieu, *à fortiori*, toutes les fois que l'angle aEH, de la chape avec l'horizontale, sera plus grand que m, ou l'angle I plus petit que 57 à 60°, et l'on n'aura à tenir compte de l'effet de la surcharge, que dans un bâtiment isolé.

Figure 14. Mais quand l'angle aEH sera plus petit que m, il faudra faire entrer le triangle arq dans le calcul de la poussée, et le triangle aEp dans l'équation d'équilibre; ces triangles étant déterminés par les lignes rq, Ep qui font l'angle m avec l'horizontale. On aurait aussi à considérer les effets de la masse excédante dans le cas où elle serait soutenue par un petit mur, etc.

54. Toutes les circonstances dont on vient de parler, et qui ont lieu dans le cas très-particulier d'une surcharge en sable pur, doivent se reproduire, avec des angles d'arc-boutement différens, pour les diverses espèces de remblais; mais tout est encore à déterminer sur cet objet. Ce que nous avons dit suffit pour faire voir combien la question de la surcharge des voûtes pourra se simplifier, quand on aura complété et étendu, à des remblais quelconques, les expériences

et observations qui font le sujet de la *Notice* citée, de M. le capitaine Moreau.

Nous ne nous étendrons pas sur les modifications qu'introduit la considération de la surcharge dans la valeur des poussées dues au glissement. D'après la formule générale $G = \frac{P}{\text{tang.}(\alpha+\theta)}$, on voit qu'il suffirait d'ajouter, à P, la quantité γs; s étant la surface du rectangle ou parallèlogramme *aprq*, dans la première hypothèse, ou celle d'un triangle *api*, dans l'hypothèse d'une charge de sable. Figure 3.

Note première.

Exemples de calcul de voûtes en plein cintre, extradossées parallèlement.

Nous prendrons pour exemples, le petit nombre de voûtes calculées par les auteurs qui ont traité de la théorie, afin de faire voir avec quelle extrême facilité toutes les circonstances de ce calcul, se déduisent de nos tables (A) et (B).

1° Voûte calculée par M. Audoy (*Mémorial*, p. 30) $r = 10^m$, $R = 11^m,50$ et $h = 2^m$.

Dans cette voûte, $K = 1.15$, et la table (A) donne, pour l'angle de rupture correspondant, $\alpha = 57° 1'$, et, pour valeur de la poussée, $n = 9,176$.

Pour calculer l'épaisseur e du piédroit, la table (B) donne la formule suivante relative à $K = 1.15$,

$$\frac{e}{r} = -0,2533\frac{r}{h} + \sqrt{0,0642\frac{r^2}{h^2} + 0,0536\frac{r}{h} + 0,1835}.$$

En y faisant $r = 10$ et $h = 2$, on obtient $e = 1^m,675$.

On trouvera l'épaisseur pratique avec la stabilité des voûtes de Lahire, en changeant la formule précédente en celle-ci (n° 16) :

$$\frac{e}{r} = -0,2533\frac{r}{h} + \sqrt{0,0640\frac{r^2}{h^2} + 0,2435\frac{r}{h} + 0,3487},$$

qui donne $e = 5^m,211$.

Enfin, si l'on voulait se contenter de l'épaisseur limite, on aurait : $e = 5^m,905$; valeur qui diffère assez peu de la précédente.

Remarque. M. Audoy a trouvé que, si l'épaisseur de la voûte ci-dessus, devenait 1^m au lieu de $1^m,50$, l'angle de rupture serait d'environ 54°, et la poussée de 6.7594. En effet, notre table (A) donne, pour cette nouvelle voûte, dans laquelle $K = 1.10$, $\alpha = 53° 15'$ et $\Pi = 6.754$; mais la valeur $K = 1.10$, nous apprend que cette voûte ne se soutiendrait pas sur ses naissances, puisque K est au-dessous de la limite 1.114 (9) : c'est ce que conclut aussi M. Audoy de ses calculs, en ajoutant que la plus petite épaisseur que comporte la voûte donnée, se trouve entre 1^m et $1^m,50$; mais nous avons, de suite, cette épaisseur minimum au moyen de la limite $K = 1.114$. Il suffit de poser $\frac{R}{10} = 1.114$; d'où $R = 11^m,14$, et l'épaisseur cherchée $= 1^m,14$.

2°. Voûte calculée par MM. Lamé et Clapeyron : $r = 8$, $R = 9$.

Pour cette voûte, $K = 1.125$. Cette valeur de K tombant entre $K = 1.12$ et $K = 1.13$ de la table, on prendra la moyenne des angles correspondans à ces deux valeurs, et on aura $\alpha = 55° 16' 30''$ pour l'angle de rupture. MM. Lamé et Clapeyron trouvent

$\alpha = 55^\circ\,23'$: ils n'ont pas calculé la poussée. On la conclut facilement d'une interpolation qui donne $\Pi = 0{,}08045\,r^2 = 5{,}14893$.

3°. Voûte calculée par M. Persy : $r = 4^m{,}45$, $R = 5^m{,}45$.

Cet exemple est traité, par M. Persy, comme voûte en arc de cercle, avec ouverture de 5^m et 4^m de hauteur de flèche; mais, attendu que, d'après ces données, le demi-angle au centre est de 64° et plus grand que l'angle de rupture, elle rentre, pour le calcul de la poussée, dans le cas des voûtes en plein-cintre. En effet, elle donne $K = 1{,}224$, et, par interpolation entre les valeurs correspondantes à $K = 1.22$ et $K = 1.23$ de la table (A), on trouve immédiatement l'angle de rupture $\alpha = 60^\circ\,27'\,\frac{1}{2}$, et la poussée $\Pi = 2{,}3841$. M. Persy obtient $\alpha = 60^\circ\,30'$ et $\Pi = 2{,}3830$.

Note II.

Exemple de calcul d'une voûte extradossée en chape à 45°.

Nous choisissons la voûte dont les données sont $r = 5^m$, $R = 6^m$, $h = 2^m$.

Pour cette voûte, $K = 1{,}2$, et la table (C) donne

$$\alpha = 50^\circ, \quad \Pi = 0{,}25806\,r^2 = 6{,}4515, \quad e = 1^m{,}66.$$

Cette épaisseur, $1^m{,}66$, qui se rapporte à l'équilibre strict, a été calculée au moyen de la formule (E') du n° 27, qui devient, pour la voûte donnée,

$$\frac{e}{r} = -0{,}6546\,\frac{r}{h} + \sqrt{0{,}4285\,\frac{r^2}{h^2} + 0{,}2725\,\frac{r}{h} + 0{,}5161}.$$

Pour obtenir la formule pratique relative à la stabi-

lité de la voûte du magasin de Vauban, il faut mettre 2 C au lieu de C dans (E'), ce qui donne

$$\frac{e}{r} = -0{,}6546\frac{r}{h} + \sqrt{0{,}4285\frac{r^2}{h^2} + 0{,}8918\frac{r}{h} + 1{,}0322}.$$

L'inspection de ces formules fait voir qu'il serait facile de former un tableau général, semblable à celui du n°. 15, et qui offrirait les épaisseurs de piédroits de toutes les voûtes possibles extradossées en chape, à 45°. Voici les résultats de ces formules pour quelques valeurs de h :

Valeurs de h.	Epaisseur théorique.	Stabilité de Vauban.
2^m.00,	$e = 1^m.6606$,	$e = 4^m.0030$,
2 .50,	$e = 1$ .7825,	$e = 4$ .0955,
5 .00,	$e = 2$ .2430,	$e = 4$ .3960,
10 .00,	$e = 3$ .2520,	$e = 4$ .6585,
50 .00,	$e = 3$ .3725,	$e = 4$ .9775,
L'infini	$e = 3$ .5920,	$e = 5$ .0800,

Cette table montre que, pour les épaisseurs pratiques du moins, la limite qui correspond à une hauteur infinie des piédroits, ne s'éloigne pas beaucoup de l'épaisseur relative à des hauteurs ordinaires, et qu'un tableau de ces limites peut être souvent utile à consulter (*Voy.* les deux dernières colonnes de droite de la table C).

Note III^e.

Sur le second mode de rupture.

De toutes les voûtes en plein cintre, la voûte à extrados horizontal est celle dont les reins sont les plus chargés, et pour laquelle on pourrait présumer que le
Figure 6. 2^e mode de rupture doit se présenter. Dans ce mode, le

voussoir supérieur est soulevé en tournant simultanément autour de l'arête inférieure b, de la clef, et de l'arête d'extrados n, du joint des reins; tandis que la partie qui avoisine les piédroits, tombe au dedans de la voûte, en tournant sur l'arête d'intrados du joint de naissance: c'est le contraire de ce qui arrive dans le premier mode de rupture, où les joints s'ouvrent respectivement dans un sens opposé. Nous avons dit, § I^er^, que ce mode ne se présentait jamais dans les voûtes circulaires. Comme M. Audoy a supposé qu'il pouvait avoir lieu pour les voûtes extradossées horizontalement (*Mémorial*, N° 4, page 32), et que, par suite, il a été conduit à une limite d'épaisseur de la voûte trop petite, d'où M. Persy a tiré la conclusion que la théorie de cet ingénieur était défectueuse, nous croyons utile d'éclaircir ce point; de faire voir que cette théorie donne des résultats exacts, et permet de conclure que le deuxième mode de rupture ne peut jamais avoir lieu pour aucune voûte, en plein cintre, extradossée horizontalement; ce que n'indique pas la théorie de M. Persy, où l'on fait entrer d'ailleurs la considération de limites qu'il nous paraît impossible d'admettre.

La force horizontale F', appliquée en b, ne doit pas être assez grande pour soulever un voussoir quelconque *mncab*, en le faisant tourner autour de son extrados en n; elle doit donc être, au plus, égale au minimum des valeurs que peut prendre l'expression $\frac{P\varphi'}{\gamma'}$, P désignant toujours la surface *mncab*, φ' la distance horizontale de son centre de gravité au point n, et γ' la distance bn' de n à l'horizontale F'b. Il faut donc former

cette expression au moyen des données r et R de la voûte, et de l'angle variable α, d'un joint quelconque nn, avec la verticale de la clef; et son minimum, pris relativement à α, sera la valeur exacte de la poussée horizontale dans le deuxième état d'équilibre, et, par extension, dans tous les cas de stabilité, d'après ce que nous avons dit, au § I^er^, pour le premier mode de rupture.

En remarquant que la surface P, se compose du rectangle $acnn'$, plus le triangle Onn', moins le secteur Omb, les élémens du calcul de P_{γ}' sont :

Rect. $acnn' = R^2 \sin.\alpha\,(1-\cos.\alpha)$, bras de levier $\frac{1}{2}R\sin.\alpha$,

Triang. $Onn' = \frac{1}{2}R^2\sin.\alpha\cos.\alpha$, ... *idem.* $\frac{1}{3}R\sin.\alpha$,

Sect. $Omb = \frac{1}{2}r^2\alpha$, ... *idem.* $\frac{2}{3}r\left(\frac{1-\cos.\alpha}{\alpha}\right)$.

On conclura, de là, P_{γ}' par le théorême des momens.

Comme on a, de plus, $\gamma' = r - R\cos.\alpha$, on trouvera, après les réductions et l'introduction de $K = \frac{R}{r}$, la formule

$$F' = \frac{r^2\sin.^2\alpha}{6(1-K\cos.\alpha)}\left\{K^3(3-\cos.\alpha) - 3K\frac{\alpha}{\sin.\alpha} + \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}\right\}.$$

Il faudra y substituer différentes valeurs de α, et celle pour laquelle la valeur de F' sera la plus petite, correspondra à l'angle de rupture, et donnera la force horizontale π' (*).

(*) On ne fera de substitutions qu'à partir de l'angle qui donne $F' = \infty$, déterminé par la condition $\cos.\alpha = \frac{1}{K}$, et qu'on aura facilement, pour chaque valeur de K, en menant un rayon par le

On pourrait former une table, de ces angles et de ces poussées, tout à fait analogue à la table (D), relative au premier mode de rupture. Voici quelques valeurs qui suffiront, et dont une partie est tirée des calculs de M. Persy :

VALEURS de K.	RAPPORT du diamètre à l'épaisseur.	ANGLE de rupture.	POUSSÉE horizontale Π'.
1.06	40,000	39°	$0,10459\ r^3$
1.04	50,000	35°	$0,08486\ r^3$
1.03	66,666	28°	$0,06452\ r^3$
1.025	80,000	25°	$0,05407\ r^3$

Il s'agit de savoir maintenant quel est le système de voûtes pour lesquelles la force Π', appliquée à l'intrados de la clef, sera assez faible pour permettre à la demi-voûte de tourner autour de l'arête A, d'intrados, de sa naissance, c'est-à-dire, pour lesquelles le moment de $\Pi' r$, sera plus petit que celui de cette demi-voûte pris relativement au point A ; celles-là s'écrouleront par rotation à l'intérieur. Or le moment $\Pi' r$ est tout trouvé d'après la table précédente : celui de la demi-voûte, autour de A, est facile à calculer, et sera donné par l'expression

$$r^3\left(K^2-\frac{1}{2}K^3-\frac{3\pi-4}{12}\right).$$

Voici ces deux espèces de momens mis en regard.

---

le point i, où l'extrados rencontre la direction de la force horizontale appliquée en b ; pour le voussoir correspondant, en effet, cette force horizontale passe par le point de rotation lui-même, et ne peut faire équilibre au poids P, quelle que soit son intensité.

VALEURS de K.	MOMENT de la force Π'.	MOMENT de la demi-voûte.
1.05	0.10459 r^3	0,07164 r^3
1.04	0,08486 r^3	0,06717 r^3
1.03	0,06452 r^3	0,06260 r^3
1.025	0,05407 r^3	0,06015 r^3

On voit que le moment de Π' est le plus petit pour les voûtes du système K=1.025; ce qui indique la limite à partir de laquelle les voûtes s'écrouleraient par le deuxième mode de rotation. Mais, comme cette limite est au-delà de celle K=1,0435, à partir de laquelle le premier mode de rupture aurait lieu par l'excédant du moment de la poussée, appliquée en *a*, qui renverserait la voûte à l'extérieur, et, comme une même voûte ne peut pas se rompre de deux manières, on doit conclure qu'encore bien que, dans celles du système K=1,025, les conditions relatives aux deux modes de rupture soient satisfaites, c'est cependant le premier qui aura lieu, puisque la différence des momens de la poussée et de la demi-voûte, est beaucoup plus grande dans ce cas que dans le second.

C'est donc la limite K=1,0435, seule, qu'il faut considérer, et il n'y aurait lieu à s'occuper de la limite relative au deuxième mode de rupture, que dans le cas où elle serait moins éloignée que la première ; ce qui n'arrive, comme nous l'avons dit, pour aucun genre de voûtes circulaires. Au reste, il faut avouer que ces discussions sont plus curieuses qu'utiles, et n'intéressent que fort peu la pratique. Il nous paraît, en effet, indispensable de prendre, pour les voûtes extradossées horizontalement, comme nous avons dit

de le faire pour celles en chape, et par les mêmes raisons, la limite relative aux voûtes extradossées parallèlement, et de ne donner à aucune voûte une épaisseur moindre que la 17^{e} partie du diamètre, à moins qu'on ne fasse usage de quelque moyen d'art pour lui procurer une stabilité artificielle.

Passons maintenant à l'exemple traité par MM. Audoy et Persy, concernant la voûte pour laquelle $r = 10^{m}$, $R = 11^{m}$. On déduit, de ces données, $K = 1,10$, et la table (D), relative au premier mode de rupture, donne

Angle de rupture, $\alpha = 65°$,

Poussée horizontale, $\Pi = 0,10279r^{2} = 10,279$.

Ces résultats sont, à très peu près, les mêmes que ceux trouvés par MM. Audoy et Persy ; mais c'est sur la question de savoir quelle est la plus petite épaisseur que puisse recevoir la voûte proposée pour se soutenir sur ses naissances, que ces auteurs ne sont plus d'accord. M. Audoy supposant, *à priori*, que, pour de très petites épaisseurs de la voûte, elle ne peut se rompre que par le deuxième mode de rotation, compare les momens de la poussée et de la demi-voûte dans plusieurs hypothèses, et trouve que, pour l'épaisseur $0^{m}.50$, il y a stabilité assez grande ; que, pour $0^{m}.30$, les momens sont à peu près égaux, et qu'ainsi cette épaisseur est aussi, à peu près, la plus petite qu'on puisse donner à la voûte ; qu'enfin, pour $0^{m}.25$, il y a rupture. Tous ces résultats sont exacts relativement au deuxième mode de rupture. En effet, d'après le tableau qui précède, les momens dans la voûte proposée sont :

Épaisseur.	Moment de la demi-voûte.	Moment de la poussée.
$0^m.50$,	71.64,	104.595,
$0^m.40$,	67.17,	84,864,
0. 30,	62.60,	64.52,
0. 25,	60.15,	54.077.

Mais, en faisant attention au premier mode de rupture pour lequel la limite est $K = 1,0435$, on trouve, de suite, que l'épaisseur minimum de la voûte est $0^m.435$. C'est celle qu'on doit prendre puisqu'elle est plus grande que le minimum $0^m.30$, appartenant au deuxième mode, et que c'est évidemment le plus grand des deux minimums, auquel il faut s'arrêter. Cette circonstance aurait été reconnue par M. Audoy, s'il eût fait la comparaison des momens dans le cas du premier mode de rupture. M. Persy a tenu compte, il est vrai, de tous les cas de rupture; mais, après de longues discussions, il arrive seulement à conclure que le minimum d'épaisseur est compris entre $0^m.30$ et $0^m.50$; tandis que la connaissance de la limite obtenue au moyen de notre table (D), nous a donné immédiatement la valeur exacte de cette plus petite épaisseur elle-même.

En supposant la voûte portée sur des piédroits de 10^m de hauteur, la formule (E″) du n°. 31, en y faisant $K = 1,10$, $r = 10^m$, $h = 10^m$, et $C = 0,10279$, donnera $e = 2^m,1185$ pour épaisseur théorique du piédroit. Quant à l'épaisseur pratique, on l'obtiendra par la formule, en mettant $1.90\,C$ à la place de C; ce qui donne $e = 4^m,1577$. Les limites de ces épaisseurs, pour des piédroits d'une hauteur infinie, seront, d'après la table (D), $e = 4^m,535$ pour l'équilibre strict, et $e = 6^m,249$ pour la stabilité des voûtes de Lahire.

Note IV*.

Sur les voûtes en arc de cercle.

Pour donner une idée de la manière dont la poussée augmente dans une voûte surbaissée, à mesure que la hauteur de flèche diminue, l'ouverture restant la même, nous avons calculé la valeur des poussées pour la voûte de 8^m d'ouverture et 1^m d'épaisseur, qui serait successivement en plein cintre et en arc de cercle, avec les flèches de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$ de la largeur. Les résultats de ce calcul, que donne facilement la table (E), sont compris dans ce tableau, qui renferme aussi les limites des épaisseurs théoriques relatives à des piédroits d'une hauteur infinie :

Voûte de 8^m *d'ouverture et* 1^m *d'épaisseur.*

SYSTÈME de la voûte.	VALEUR du rayon de l'intrados r.	VALEUR de $K=\frac{R}{r}$.	POUSSÉE horizontale H.	LIMITE de l'épaisseur du piédroit $V\overline{2H}$.
Plein cintre.	$4^m.00$	1.25	2,05552	$2^m.0275$
$\frac{L}{f}=4$, $f=2^m.00$	$5^m.00$	1.20	2,75557	$2^m.3475$
$\frac{L}{f}=5$, $f=1^m.60$	$5^m.80$	1.17	3,12950	$2^m.5018$
$\frac{L}{f}=6$, $f=1^m.33$	$6^m.66$	1.15	3,4959	$2^m.6442$
$\frac{L}{f}=7$, $f=1^m.14$	$7^m.55$	1.13	3,7382	$2^m.7343$
$\frac{L}{f}=8$, $f=1^m.00$	$8^m.50$	1.116	4,0026	$2^m.8293$
$\frac{L}{f}=10$, $f=0^m.80$	$10^m.40$	1.096	4,4746	$2^m.9915$
$\frac{L}{f}=16$, $f=0^m.50$	$16^m.25$	1.06	5,2865	$3^m.2492$

On voit, par ce tableau, que, quand la voûte n'a

que 1^m de flèche, ou le $\frac{1}{9}$ de l'ouverture, la poussée est double, à peu près, de ce qu'elle est dans le plein cintre; mais que l'épaisseur limite des piédroits n'augmente pas dans le même rapport, et qu'elle est loin de devenir double pour une poussée double, etc.

Note V^e^.

Application à la voûte calculée par M. Audoy.

(Mémorial, N°. 4, pag. 67.)

Cet exemple appartient au système des voûtes, en arc de cercle, pour lesquelles l'angle au centre est de 60°, et l'ouverture égale au rayon. Ces voûtes sont fort en usage dans la construction des fortifications, à cause de la facilité de leur tracé.

Pour tout ce système, on a, d'après les formules, $r=\frac{L}{2\sin.a}$, $f=r(1-\cos.a)$, et les valeurs $\cos.30^\circ=0{,}86602$, $\sin.30^\circ=0{,}50000$, $r=L$, $f=0{,}13398\,r$, et, par suite, $\frac{L}{f}=\frac{1}{0{,}13398}=7.46$.

Ce dernier rapport n'étant pas compris dans la table (E), nous le supposerons égal à 7,50, et prendrons, pour obtenir les poussées, une moyenne entre les coefficiens des systèmes $L=7f$, et $L=8f$.

Les données relatives au cas particulier traité par M. Audoy sont : l'ouverture $L=20^m$, l'épaisseur $R-r=1^m,50$, avec l'angle $a=30^\circ$, et $h=5^m$; d'où l'on déduit :

$r=L=20^m$, $f=2^m,6796$, $R=21^m,50$ et $K=1{,}075$.

Par une interpolation entre $K=1{,}07$ et $K=1{,}08$, on trouve :

pour le système $L=7f$, $\quad \Pi=0{,}04680\,r^2$;
pour le système $L=8f$, $\quad \Pi=0{,}04376\,r^2$.

La moyenne entre ces poussées, est $n = 0{,}04528\,r^2 = 400 \times 0{,}04528 = 18{,}112$.

La poussée obtenue par M. Audoy, est sensiblement moindre; mais cela tient à une simple erreur de calcul, car sa formule est exacte et donne, pour résultat, 18,248, nombre qui diffère fort peu de celui que fournit notre table. La petite différence est due aux interpolations que nous avons faites, et les inexactitudes de ce genre deviendraient aussi petites qu'on le voudrait, en resserrant les valeurs du rapport $\frac{L}{f}$, dans la table (E).

Pour trouver l'épaisseur du piédroit, il faut introduire les données de la voûte dans la formule (E'') du n° 34, qui devient, par là,

$$\frac{e}{r} = -0{,}040736\frac{r}{h} + \sqrt{0{,}0016594\frac{r^2}{h^2} - 0{,}000154\frac{r}{h} + 0{,}09056};$$

et, en y mettant la valeur $\frac{r}{h} = 4$, qui résulte de $r = 20^m$ et $h = 5^m$, $e = 0{,}17838\,r$.

Cette formule servira pour toutes les voûtes qui, correspondant à $K = 1{,}075$, auraient aussi le rapport $\frac{r}{h} = 4$ commun. On voit donc combien il serait facile de se procurer une table générale offrant, pour chaque système de voûtes en arc de cercle, des formules toutes calculées. Dans l'exemple qui nous occupe, il ne reste qu'à poser $r = 20^m$; ce qui donne, de suite, $e = 3^m{,}5676$ pour l'épaisseur cherchée.

TABLE

(A) *TABLE des angles de rupture, des poussées et des épaisseurs limites de piédroits.*

VALEUR du rapport $K=\frac{R}{r}$.	RAPPORT du diamètre à l'épaisseur.	VALEUR de l'angle de rupture.	RAPPORT C de la poussée au carré du rayon r de l'intrados.		RAPPORT $\sqrt{2C}$ de l'épaisseur limite du piédroit au rayon de l'intrados.	
			Cas de la rotation.	Cas du glissement.	Équilibre strict.	Stabilité de Lahire.
2.732	1.154	0° 00′	0,00000	0,98923		
2.70	1.176	13 42	0,00211	0.96262		
2.65	1.212	22 00	0,00319	0,92168		
2.60	1.250	27 30	0,00809	0,88151		
2.50	1.333	35 52	0,02283	0,80346		
2.40	1.428	42 6	0,04109	0,72847		
2.30	1.538	46 47	0,06886	0,65654		
2.20	1.666	51 4	0,08648	0,58767		
2.10	1.810	54 27	0,10926	0,52186		
2.00	2.000	57 17	0,13017	0,45912	0,9582	1,3223
1.90	2.282	59 37	0,14813	0,39943	0,8938	1,2320
1.80	2.500	61 24	0,16373	0,34281	0,8280	1,1414
1.70	2.857	62 53	0,17180	0,28924	0,7606	1,0484
1.60	3.333	63 49	0,17517	0,23874	0,6910	0,9525
1.59	3.389	63 52	0,17533	0,23386	0,6839	0,9427
1.58	3.448	63 55	0,17535	0,22901	0,6768	0,9329
1.57	3.508	63 58	0,17524	0,22434	0,6698	0,9233
1.56	3.571	64 1	0,17499	0,21940	0,6624	0,9131
1.55	3.636	64 3	0,17478	0,21464	0,6552	0,9031
1.54	3.703	64 5	0,17445	0,20991	0,6479	0,8931
1.53	3.773	64 7	0,17397	0,20521	0,6406	0,8831
1.52	3.846	64 8	0,17352	0,20054	0,6333	0,8730
1.51	3.920	64 8	0,17310	0,19590	0,6259	0,8628
1.50	4.000	64 9	0,17254	0,19130	0,6185	0,8527
1.49	4.081	64 8	0,17180	0,18673	0,6111	0,8424
1.48	4.166	64 8	0,17095	0,18218	0,6036	0,8320
1.47	4.255	64 7	0,17008	0,17766	0,5961	0,8216
1.46	4.347	64 6	0,16915	0,17318	0,5885	0,8112
1.45	4.444	64 5	0,16798	0,16872	0,5809	0,8007
1.44	4.545	64 3	0,16683	0,16430	0,5776	0,7962
1.43	4.651	64 00	0,16568	0,15991	0,5756	0,7934
1.42	4.761	63 56	0,16443	0,15555	0,5735	0,7906
1.41	4.878	63 52	0,16317	0,15122	0,5713	0,7874
1.40	5.000	63 48	0,16167	0,14691	0,5686	0,7838
1.39	5.128	63 43	0,16014	0,14264	0,5659	0,7801
1.38	5.263	63 38	0,15845	0,13841	0,5629	0,7760
1.37	5.406	63 32	0,15672	0,13420	0,5598	0,7717

Suite de la Table (A), *des angles de rupture, des poussées et des épaisseurs limites de piédroits.*

VALEUR du rapport $K=\frac{R}{r}$.	RAPPORT du diamètre à l'épaisseur.	VALEUR de l'angle de rupture.	RAPPORT C de la poussée au carré du rayon r de l'intrados.		RAPPORT $\sqrt{2C}$ de l'épaisseur limite du piédroit au rayon de l'intrados.	
			Cas de la rotation.	Cas du glissement.	Équilibre strict.	Stabilité de Lahire.
1,36	5.555	63° 26′	0,15482	0,13002	0,5564	0,7670
1.35	5,714	63 19	0,15287	0,12587	0,5529	0,7622
1.34	5,882	63 10	0,15096	0,12176	0,5495	0,7576
1.33	6,060	63 00	0,14896	0,11767	0,5458	0,7524
1.32	6,264	62 50	0,14678	0,11362	0,5418	0,7468
1.31	6,451	62 33	0,14510	0,10959	0,5387	0,7425
1.30	6,666	62 14	0,14330	0,10559	0,5353	0,7379
1.29	6,896	62 9	0,14013	0,10163	0,5294	0,7297
1.28	7,142	62 3	0,13691	0,09770	0,5233	0,7213
1.27	7,407	61 47	0,13430	0,09379	0,5183	0,7144
1.26	7,692	61 30	0,13157	0,08992	0,5130	0,7071
1.25	8,000	61 15	0,12847	0,08608	0,5069	0,6987
1.24	8,333	61 1	0,12516	0,08227	0,5003	0,6896
1.23	8,695	60 40	0,12201	0,07849	0,4940	0,6809
1.22	9,090	60 19	0,11887	0,07474	0,4876	0,6721
1.21	9,523	60 00	0,11516	0,07102	0,4799	0,6615
1.20	10,000	59 41	0,11140	0,06733	0,4720	0,6504
1.19	10,526	59 10	0,10791	0,06368	0,4646	0,6404
1.18	11,111	58 40	0,10417	0,06005	0,4564	0,6292
1.17	11,764	58 9	0,10021	0,05646	0,4472	0,6171
1.16	12,500	57 40	0,09593	0,05289	0,4380	0,6038
1.15	13,333	57 1	0,09176	0,04935	0,4284	0,5905
1.14	14,285	56 23	0,08729	0,04585	0,4178	0,5759
1.13	15,384	55 45	0,08254	0,04237	0,4063	0,5601
1.12	16,666	54 48	0,07789	0,03894	0,3947	0,5444
1.11	18,181	54 10	0,07293	0,03552	0,3814	0,5259
1.10	20,000	53 15	0,06754	0,03213	0,3675	0,5066
1.09	22,222	52 14	0,06177	0,02879		
1.08	25,000	51 7	0,05649	0,02546		
1.07	28,571	49 48	0,05065	0,02217		
1.06	33,333	48 18	0,04455	0,01891		
1.05	40,000	46 32	0,03813	0,01568		
1.04	50,000	44 4	0,03139	0,01249		
1.03	66,666	41 4	0,02459	0,00932		
1.02	100,000	38 12	0,01641	0,00618		
1.01	200,000	32 36	0,00889	0,00308		
1.00	Infini.	0 00	0,00000	0,00000		

(B). *TABLE des épaisseurs de piédroits.*

VALEUR du rapport $K=\frac{R}{r}$.	RAPPORT du diamètre à l'épaiss.	Rapport $\frac{e}{r}$ de l'épaisseur des piédroits au rayon de l'intrados, en fonction du rapport $\frac{r}{h}$, de ce rayon, à la hauteur des piédroits (cas de l'équilibre strict).
2.00	2.000	$-2{,}3562\frac{r}{h}+\sqrt{(5{,}5517\frac{r^2}{h^2}+1{,}7907\frac{r}{h}+0{,}9182)}$
1.90	2.222	$-2{,}0449\frac{r}{h}+\sqrt{(4{,}2021\frac{r^2}{h^2}+1{,}3240\frac{r}{h}+0{,}7988)}$
1.80	2.500	$-1{,}7593\frac{r}{h}+\sqrt{(3{,}0951\frac{r^2}{h^2}+0{,}9368\frac{r}{h}+0{,}6856)}$
1.70	2.857	$-1{,}4844\frac{r}{h}+\sqrt{(2{,}2034\frac{r^2}{h^2}+0{,}6933\frac{r}{h}+0{,}5785)}$
1.60	3.333	$-1{,}2252\frac{r}{h}+\sqrt{(1{,}5012\frac{r^2}{h^2}+0{,}3775\frac{r}{h}+0{,}4775)}$
1.59	3.389	$-1{,}2001\frac{r}{h}+\sqrt{(1{,}4404\frac{r^2}{h^2}+0{,}3566\frac{r}{h}+0{,}4677)}$
1.58	3.448	$-1{,}1752\frac{r}{h}+\sqrt{(1{,}3812\frac{r^2}{h^2}+0{,}3361\frac{r}{h}+0{,}4580)}$
1.57	3.508	$-1{,}1513\frac{r}{h}+\sqrt{(1{,}3255\frac{r^2}{h^2}+0{,}3151\frac{r}{h}+0{,}4487)}$
1.56	3.571	$-1{,}1261\frac{r}{h}+\sqrt{(1{,}2677\frac{r^2}{h^2}+0{,}2966\frac{r}{h}+0{,}4388)}$
1.55	3.636	$-1{,}1015\frac{r}{h}+\sqrt{(1{,}2133\frac{r^2}{h^2}+0{,}2783\frac{r}{h}+0{,}4293)}$
1.54	3.703	$-1{,}0772\frac{r}{h}+\sqrt{(1{,}1605\frac{r^2}{h^2}+0{,}2603\frac{r}{h}+0{,}4198)}$
1.53	3.773	$-1{,}0531\frac{r}{h}+\sqrt{(1{,}1091\frac{r^2}{h^2}+0{,}2428\frac{r}{h}+0{,}4104)}$
1.52	3.846	$-1{,}0292\frac{r}{h}+\sqrt{(1{,}0592\frac{r^2}{h^2}+0{,}2224\frac{r}{h}+0{,}4011)}$
1.51	3.920	$-1{,}0073\frac{r}{h}+\sqrt{(1{,}0146\frac{r^2}{h^2}+0{,}2056\frac{r}{h}+0{,}3918)}$
1.50	4.000	$-0{,}9817\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}9638\frac{r^2}{h^2}+0{,}1937\frac{r}{h}+0{,}3826)}$
1.49	4.081	$-0{,}9583\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}9184\frac{r^2}{h^2}+0{,}1684\frac{r}{h}+0{,}3735)}$
1.48	4.166	$-0{,}9349\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}8741\frac{r^2}{h^2}+0{,}1659\frac{r}{h}+0{,}3644)}$
1.47	4.255	$-0{,}9125\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}8328\frac{r^2}{h^2}+0{,}1482\frac{r}{h}+0{,}3553)}$
1.46	4.347	$-0{,}8887\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}7899\frac{r^2}{h^2}+0{,}1362\frac{r}{h}+0{,}3464)}$
1.45	4.444	$-0{,}8659\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}7498\frac{r^2}{h^2}+0{,}1232\frac{r}{h}+0{,}3374)}$
1.44	4.545	$-0{,}8432\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}7110\frac{r^2}{h^2}+0{,}1181\frac{r}{h}+0{,}3337)}$
1.43	4.651	$-0{,}8206\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}6735\frac{r^2}{h^2}+0{,}1153\frac{r}{h}+0{,}3314)}$
1.42	4.761	$-0{,}7983\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}6372\frac{r^2}{h^2}+0{,}1143\frac{r}{h}+0{,}3290)}$
1.41	4.878	$-0{,}7760\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}6023\frac{r^2}{h^2}+0{,}1102\frac{r}{h}+0{,}3263)}$
1.40	5.000	$-0{,}7540\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}5685\frac{r^2}{h^2}+0{,}1074\frac{r}{h}+0{,}3233)}$
1.39	5.128	$-0{,}7321\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}5359\frac{r^2}{h^2}+0{,}1048\frac{r}{h}+0{,}3203)}$
1.38	5.263	$-0{,}7103\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}5045\frac{r^2}{h^2}+0{,}1021\frac{r}{h}+0{,}3169)}$

Suite de la Table (B), *des épaisseurs de piédroits.*

VALEUR du rapport $K = \frac{R}{r}$.	RAPPORT du diamètre à l'épaiss.	Rapport $\frac{e}{r}$ de l'épaisseur des piédroits au rayon de l'intrados, en fonction du rapport $\frac{r}{h}$ de ce rayon, à la hauteur des piédroits (cas de l'équilibre strict).
1.37	5,406	$-0{,}6887\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}4743\frac{r^2}{h^2}+0{,}0995\frac{r}{h}+0{,}3134)}$
1.36	5,555	$-0{,}6673\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}4452\frac{r^2}{h^2}+0{,}0969\frac{r}{h}+0{,}3096)}$
1.35	5,714	$-0{,}6460\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}4173\frac{r^2}{h^2}+0{,}0944\frac{r}{h}+0{,}3057)}$
1.34	5,882	$-0{,}6249\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}3904\frac{r^2}{h^2}+0{,}0926\frac{r}{h}+0{,}3019)}$
1.33	6,060	$-0{,}6050\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}3660\frac{r^2}{h^2}+0{,}0903\frac{r}{h}+0{,}2979)}$
1.32	6,264	$-0{,}5831\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}3400\frac{r^2}{h^2}+0{,}0880\frac{r}{h}+0{,}2936)}$
1.31	6,451	$-0{,}5624\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}3163\frac{r^2}{h^2}+0{,}0875\frac{r}{h}+0{,}2902)}$
1.30	6,666	$-0{,}5419\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}2937\frac{r^2}{h^2}+0{,}0867\frac{r}{h}+0{,}2866)}$
1.29	6,896	$-0{,}5216\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}2720\frac{r^2}{h^2}+0{,}0828\frac{r}{h}+0{,}2803)}$
1.28	7,142	$-0{,}5014\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}2520\frac{r^2}{h^2}+0{,}0801\frac{r}{h}+0{,}2738)}$
1.27	7,407	$-0{,}4926\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}2426\frac{r^2}{h^2}+0{,}0778\frac{r}{h}+0{,}2686)}$
1.26	7,692	$-0{,}4615\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}2130\frac{r^2}{h^2}+0{,}0755\frac{r}{h}+0{,}2631)}$
1.25	8,000	$-0{.}4418\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}1952\frac{r^2}{h^2}+0{,}0730\frac{r}{h}+0{,}2569)}$
1.24	8,333	$-0{,}4222\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}1783\frac{r^2}{h^2}+0{,}0713\frac{r}{h}+0{,}2503)}$
1.23	8,695	$-0{,}4028\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}1623\frac{r^2}{h^2}+0{,}0684\frac{r}{h}+0{,}2440)}$
1.22	9,090	$-0{,}3836\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}1471\frac{r^2}{h^2}+0{,}0674\frac{r}{h}+0{,}2377)}$
1.21	9,523	$-0{,}3645\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}1329\frac{r^2}{h^2}+0{,}0641\frac{r}{h}+0{,}2303)}$
1.20	10,000	$-0{,}3456\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}1194\frac{r^2}{h^2}+0{,}0614\frac{r}{h}+0{,}2228)}$
1.19	10,526	$-0{,}3268\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}1068\frac{r^2}{h^2}+0{,}0600\frac{r}{h}+0{,}2158)}$
1.18	11,111	$-0{,}3082\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}0950\frac{r^2}{h^2}+0{,}0581\frac{r}{h}+0{,}2083)}$
1.17	11,764	$-0{,}2897\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}0840\frac{r^2}{h^2}+0{,}0561\frac{r}{h}+0{,}2004)}$
1.16	12,500	$-0{,}2714\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}0734\frac{r^2}{h^2}+0{,}0559\frac{r}{h}+0{,}1919)}$
1.15	13,333	$-0{,}2533\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}0642\frac{r^2}{h^2}+0{,}0536\frac{r}{h}+0{,}1835)}$
1.14	14,285	$-0{,}2353\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}0554\frac{r^2}{h^2}+0{,}0513\frac{r}{h}+0{,}1745)}$
1.13	15,384	$-0{,}2175\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}0473\frac{r^2}{h^2}+0{,}0490\frac{r}{h}+0{,}1651)}$
1.12	16,666	$-0{,}1998\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}0399\frac{r^2}{h^2}+0{,}0467\frac{r}{h}+0{,}1557)}$
1.11	18,181	$-0{,}1823\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}0332\frac{r^2}{h^2}+0{,}0426\frac{r}{h}+0{,}1455)}$
1.10	20,000	$-0{,}1649\frac{r}{h}+\sqrt{(0{,}0272\frac{r^2}{h^2}+0{,}0394\frac{r}{h}+0{,}1351)}$

VOÛTES EN PLEIN CINTRE, EXTRADOSSÉES EN CHAPE A 45°.

(C). *TABLE des angles de rupture, des poussées et des épaisseurs limites de piédroits.*

VALEUR du rapport $K=\frac{R}{r}$	RAPPORT du diamètre à l'épaisseur.	VALEUR de l'angle de rupture.	RAPPORT C de la poussée au carré du rayon r de l'intrados.		RAPPORT de l'épaisseur limite du piédroit au rayon de l'intrados.	
			Cas de la rotation.	Cas du glissement.	Équilibre strict.	Stabilité de Vauban.
2.00	2,000	60°	0,26424	0,24361	1,2212	1,1246
1.90	2,222	60	0,28416	0,65648	1,1458	1,6204
1.80	2,500	60	0,29907	0,57383	1,0759	1,5147
1.70	2,857	60.	0,30887	0,49564	0,9956	1,4081
1.60	3,333	60	0,31245	0,42191	0,9186	1,2990
1.59	3,389	60	0,31249	0,41478	0,9108	1,2880
1.58	3,448	60	0,31257	0,40841	0,9038	1,2781
1.57	3,508	61	0,31264	0,40067	0,8952	1,2660
1.56	3,571	61	0,31246	0,39367	0,8864	1,2548
1.55	3,636	61	0,31222	0,38673	0,8795	1,2437
1.54	3,703	61	0,31191	0,37983	0,8716	1,2318
1.53	3,773	61	0,31153	0,37297	0,8637	1,2214
1.52	3,846	61	0,31108	0,36615	0,8557	1,2108
1.51	3,920	61	0,31056	0,35938	0,8478	1,1989
1.50	4,000	61	0,30996	0,35266	0,8398	1,1877
1.49	4,081	61	0,30928	0,34598	0,8318	1,1764
1.48	4,166	61	0,30855	0,33934	0,8238	1,1650
1.47	4,255	61	0,30772	0,33275	0,8158	1,1537
1.46	4,347	60	0,30685	0,32621	0,8077	1,1422
1.45	4,444	60	0,30587	0,31971	0,7996	1,1308
1.44	4,545	60	0,30485	0,31325	0,7915	1,1193
1.43	4,651	60	0,30408	0,30684	0,7834	1,1078
1.42	4,761	60	0,30296	0,30047	0,7784	1,1008
1.41	4,878	60	0,30173		0,7768	1,0986
1.40	5,000	59	0,30001	0,28787	0,7746	1,0954
1.39	5,128	59	0,29712		0,7709	1,0914
1.38	5,263	59	0,29706		0,7690	1,0914
1.37	5,406	59	0,29550		0,7688	1,0872

VOÛTES EN PLEIN CINTRE, EXTRADOSSÉES EN CHAPE A 45°.

Suite de la Table (C), *des angles de rupture, des poussées et des épaisseurs limites de piédroits.*

VALEUR du rapport $K=\frac{R}{r}$.	RAPPORT du diamètre à l'épaisseur.	VALEUR de l'angle de rupture.	RAPPORT C de la poussée au carré du rayon de l'intrados.		RAPPORT de l'épaisseur limite du piédroit au rayon de l'intrados.	
			Cas de la rotation	Cas du glissement	Equilibre strict.	Stabilité de Vauban.
1.36	5,555	59°	0,29386		0,7665	1,0841
1.35	5,714	58	0,29285		0,7653	1,0828
1.34	5,882	58	0,29037		0,7621	1,0777
1.33	6,060	58	0,28850		0,7598	1,0742
1.32	6,264	58	0,28654		0,7570	1,0705
1.31	6,451	57	0,28456		0,7544	1,0668
1.30	6,666	57	0,28231	0,22736	0,7514	1,0626
1.29	6,896	57	0,28027		0,7487	1,0588
1.28	7,142	56	0,27810		0,7458	1,0547
1.27	7,407	56	0,27578		0,7427	1,0503
1.26	7,692	55	0,27343		0,7396	1,0458
1.25	8,000	54	0,27102		0,7362	1,0412
1.24	8,333	53	0,26850		0,7328	1,0363
1.23	8,695	53	0,26608		0,7274	1,0316
1.22	9,090	52	0,26377		0,7263	1,0272
1.21	9,523	51	0,26074		0,7221	1,0217
1.20	10,000	50	0,25806	0,17171	0,7184	1,0160
1.19	10,526	50	0,25546		0,7148	1,0109
1.18	11,111	49	0,25277		0,7111	1,0045
1.17	11,764	49	0,25010		0,7072	1,0002
1.16	12,500	48	0,24742		0,7034	0,9948
1.15	13,333	47	0,24477		0,6997	0,9894
1.14	14,285	46	0,24218		0,6960	0,9842
1.13	15,384	44	0,23967		0,6923	0,9791
1.12	16,666	43	0,23732		0,6889	0,9743
1.11	18,181	43	0,23502		0,6856	0,9695
1.10	20,000	42	0,23292	0,12032	0,6825	0,9652
1.05	40,000	36	0,22902		0,6768	0,9571

VOUTES EN PLEIN CINTRE, A EXTRADOS DE NIVEAU.

(D). *TABLE des angles de rupture, des poussées et des épaisseurs limites de piédroits.*

VALEUR du rapport $K=\frac{R}{r}$.	RAPPORT du diamèt. à l'épaisseur.	VALEUR de l'angle de rupture.	RAPPORT C de la poussée au carré du rayon r de l'intrados.		RAPPORT de l'épaisseur limite des piédroits au rayon de l'intrados.	
			Cas de la rotation.	Cas du glissement.	Equilibre strict.	Stabilité de Lahire.
2.00	2,000	36°	0,05486	0,50358	1,0036	1,3834
1.90	2,222	39	0,07101	0,43966	0,9377	1,2925
1.80	2,500	44	0,08850	0,37901	0,8706	1,2001
1.70	2,857	48	0,10631	0,32164	0,8020	1,1055
1.60	3,333	52	0,12300	0,26755	0,7315	1,0082
1.59	3,389	52	0,12453	0,26232	0,7243	0,9984
1.58	3,448	53	0,12602	0,25712	0,7171	0,9885
1.57	3,508	53	0,12747	0,25196	0,7099	0,9784
1.56	3,571	54	0,12837	0,24683	0,7026	0,9684
1.55	3,636	54	0,13027	0,24173	0,6953	0,9584
1.54	3,703	55	0,13153	0,23667	0 6880	0,9483
1 53	3,773	55	0,13289	0,23163	0,6806	0,9381
1.52	3,846	55	0,13414	0,22664	0,6732	0,9280
1.51	3,920	55	0,13531	0,22167	0,6658	0,9177
1.50	4,000	56	0,13648	0,21673	0,6583	0,9075
1.49	4,081	56	0,13756	0,21183	0,6509	0,8972
1.48	4,166	56	0,13856	0,20696	0,6433	0,8868
1.47	4,255	57	0,13952	0,20213	0,6358	0,8764
1,46	4,347	57	0,14041	0,19733	0,6282	0,8659
1.45	4,444	57	0,14122	0,19256	0,6206	0,8554
1.44	4,545	58	0,14195	0,18782	0,6129	0,8448
1.43	4,651	58	0,14268	0,18312	0,6052	0,8341
1.42	4,761	58	0,14311	0,17845	0,5974	0,8234
1.41	4,878	59	0,14376	0,17381	0,5896	0,8126
1.40	5,000	59	0,14421	0,16920	0,5817	0,8018
1.39	5,128	59	0,14456	0,16463	0,5738	0,7909
1.38	5,263	59	0,14481	0,16009	0,5658	0,7799
1.37	5,406	60	0,14498	0,15558	0,5578	0,7689
1.36	5,555	60	0,14506	0,15111	0,5497	0,7577
1.35	5,714	60	0,14504	0,14666	0,5416	0,7465
1.34	5,882	60	0,14491	0,14225	0,5383	0,7420
1.33	6,060	61	0,14467		0,5379	0,7414
1.32	6,264	61	0,14460		0,5377	9,7412

VOÛTES EN PLEIN CINTRE, A EXTRADOS DE NIVEAU.

Suite de la Table (D), *des angles de rupture, des poussées et des épaisseurs limites de piédroits.*

VALEUR du rapport $K=\frac{R}{r}$.	RAPPORT du diamètre à l'épaisseur.	VALEUR de l'angle de rupture.	RAPPORT C de la poussée au carré du rayon r de l'intrados.		RAPPORT de l'épaisseur limite des piédroits, au rayon de l'intrados.	
			Cas de la rotation.	Cas du glissement.	Equilibre strict.	Stabilité de Lahire.
1.31	6,451	61°	0,14300		0,5358	0,7394
1.30	6,666	61	0,14332	0,12495	0,5354	0,7379
1.29	6,896	61	0,14264		0,5341	0,7362
1.28	7,142	62	0,14186		0,5326	0,7342
1.27	7,407	62	0,14101		0,5310	0,7320
1.26	7,692	62	0,13988		0,5289	0,7290
1.25	8,000	62	0,13872	0,10405	0,5267	0,7260
1.24	8,333	62	0,13737		0,5235	0,7225
1.23	8,695	63	0,13593		0,5214	0,7187
1.22	9,090	63	0,13437		0,5184	0,7145
1.21	9,523	63	0,13263		0,5150	0,7099
1.20	10,000	63	0,13073	0,08397	0,5113	0,7048
1.19	10,526	63	0,12870		0,5073	0,6993
1.18	11,111	63	0,12650		0,5030	0,6933
1.17	11,764	64	0,12415		0,4983	0,6868
1.16	12,500	64	0,12182		0,4936	0,6803
1.15	13,333	64	0,11895	0,06471	0,4877	0,6723
1.14	14,285	64	0,11608		0,4818	0,6641
1.13	15,384	64	0,11303		0,4755	0,6553
1.12	16,666	64	0,10979		0,4686	0,6459
1.11	18,181	65	0,10641		0,4613	0,6358
1.10	20,000	65	0,10279	0,04627	0,4535	0,6249
1.09	22,222	66	0,098992		0,4449	0,6133
1.08	25,000	66	0,094967		0,4358	0,6007
1.07	28,571	67	0,091189		0,4270	0,5886
1.06	33,333	68	0,086376		0,4156	0,5729
1.05	40,000	69	0,081755	0,02865	0,4044	0,5573
1.04	50,000	70	0,076857			
1.03	66,666	71	0,071853			
1.02	100,000	73	0,066469			
1.01	200,000	74	0,061324			
1.00	l'infini.	75	0,055472	0,01185		

VOÛTES EN ARC DE CERCLE, A EXTRADOS PARALLÈLE.

(E). *TABLE des poussées dans divers systèmes.*

VALEUR du rapport $\frac{f}{r}=K$	RAPPORT DE LA POUSSÉE AU CARRÉ DU RAYON DE L'INTRADOS.						
	SYSTÈME $l=4f$, $r=\frac{5}{4}f$, $\alpha=53°\ 7'\ 30''$.	SYSTÈME $l=5f$, $r=\frac{13}{8}f$, $\alpha=43°\ 36'\ 10''$.	SYSTÈME $l=6f$, $r=\frac{17}{8}f$, $\alpha=36°\ 52'\ 10''$.	SYSTÈME $l=7f$, $r=\frac{53}{16}f$, $\alpha=31°\ 53'\ 20''$.	SYSTÈME $l=8f$, $r=\frac{17}{4}f$, $\alpha=28°\ 4'\ 20''$.	SYSTÈME $l=10f$, $r=13f$, $\alpha=22°\ 37'\ 10''$.	SYSTÈME $l=12f$, $r=\frac{37}{2}f$, $\alpha=14°\ 15'\ 0''$.
1.40	0,15445	0,14691	0,14691	0,14691	0,14691	0,14478	
1.35	0,14717	0,13010	0,12587	0,12587	0,12587	0,12405	
1.34	0,14543	0,12987	0,12171	0,12171	0,12171	0,11999	
1.33	0,14364	0,12781	0,11767	0,11767	0,11767	0,11596	
1.32	0,14173	0,12634	0,11362	0,11362	0,11362	0,11196	
1.31	0,13975	0,12486	0,10959	0,10959	0,10959	0,10800	
1.30	0,13764	0,12331	0,10682	0,10559	0,10559	0,10406	
1.29	0,13543	0,12164	0,10563	0,10163	0,10163	0,10016	
1.28	0,13311	0,11988	0,10437	0,09770	0,09770	0,09628	
1.27	0,13068	0,11803	0,10364	0,09379	0,09379	0,09244	
1.26	0,12815	0,11609	0,10160	0,08992	0,08992	0,08862	
1.25	0,12547	0,11402	0,10009	0,08668	0,08608	0,08483	0,07180
1.24	0,12270	0,11251	0,09850	0,08549	0,08227	0,08108	0,06862
1.23	0,12031	0,10958	0,09679	0,08423	0,07849	0,07735	0,06547
1.22	0,11675	0,10725	0,09499	0,08291	0,07474	0,07366	0,06234
1.21	0,11354	0,10460	0,09305	0,08148	0,07102	0,06999	0,05924
1.20	0,11023	0,10196	0,09102	0,07999	0,06981	0,06636	0,05616
1.19	0,10676	0,09915	0,08885	0,07834	0,06859	0,06275	0,05311
1.18	0,10313	0,09617	0,08653	0,07651	0,06727	0,05918	0,05008
1.17	0,09934	0,09303	0,08408	0,07468	0,06583	0,05212	0,04709
1.16	0,09537	0,08975	0,08144	0,07264	0,06420	0,05004	0,04411
1.15	0,09123	0,08634	0,07866	0,07050	0,06259	0,04904	0,04116
1.14	0,08690	0,08257	0,07568	0,06812	0,06077	0,04803	0,03824
1.13	0,08238	0,07869	0,07251	0,06558	0,05890	0,04671	0,03534
1.12	0,07764	0,07459	0,06911	0,06297	0,05659	0,04451	0,03247
1.11	0,07269	0,07042	0,06548	0,06026	0,05421	0,04384	0,02962
1.10	0,06737	0,06563	0,06158	0,05666	0,05160	0,04214	0,02681
1.09	0,06211	0,06077	0,05739	0,05345	0,04871	0,04023	0,02401
1.08	0,05636	0,05652	0,05288	0,04934	0,04552	0,03806	0,02192
1.07	0,05052	0,05011	0,04804	0,04426	0,04200	0,03560	0,02111
1.06	0,04431	0,04428	0,04280	0,04058	0,03861	0,03276	0,02002
1.05	0,03776	0,03804	0,03709	0,03550	0,03357	0,02944	0,01882
1.04	0,03096	0,03144	0,03095	0,02992	0,02862	0,02561	0,01720
1.03	0,02378	0,02437	0,02424	0,02369	0,02293	0,02131	0,01524
1.02	0,01625	0,01681	0,01690	0,01673	0,01640	0,01546	0,01199
1.01	0,00834	0,00871	0,00886	0,00889	0,00885	0,00862	0,00747

SOLUTION GRAPHIQUE

DES PRINCIPALES QUESTIONS,

SUR LA

STABILITÉ DES VOÛTES (*);

Par M. PONCELET, Chef de bataillon du Génie.

1. L'objet de ce mémoire, n'est point de construire géométriquement les différentes formules analytiques, qui ont été données, par M. le colonel Audoy, dans le quatrième N° du *Mémorial*; cette marche aurait l'inconvénient de conduire à autant de procédés distincts qu'il y a d'espèces de voûtes à considérer, et d'ailleurs elle ne serait applicable qu'aux seuls cas soumis au calcul par cet habile ingénieur. Nous nous proposons de montrer comment, en opérant directement sur l'épure de la voûte elle-même, on peut obtenir graphiquement tous les élémens de la question, sans avoir à s'inquiéter de la nature particulière de

(*) Les personnes qui voudront passer, de suite, à l'exécution de l'épure relative à la solution usuelle du problème des voûtes, pourront se borner à la lecture de la première partie de la *Légende explicative*, placée à la fin de ce mémoire.

l'intrados et de l'extrados ; ce qui fait rentrer la méthode dans la classe de celles qui ont été recommandées, par Coulomb, dans son *Mémoire sur les murs de revêtemens et l'équilibre des voûtes*.

De telles méthodes, si elles n'ont par le mérite de la rigueur qu'apportent avec elles les formules algébriques, ont au moins l'avantage de s'étendre uniformément à tous les cas, de s'adresser à toutes les intelligences, et de se concilier très-bien avec la nature des travaux qu'exige la rédaction des projets. D'ailleurs, le présent N° du *Mémorial* contient, sur les moyens de simplification des formules et des calculs, des recherches pleines d'intérêt, et propres à remplir le vœu des ingénieurs qui préfèrent cette voie de solution aux procédés purement graphiques.

2. Pour lire ce qui suit, il n'est point indispensable de posséder une connaissance complète de tout le contenu du *Mémoire* de M. le colonel Audoy, *sur le calcul des voûtes ;* il suffit qu'on ait l'intelligence des principes et des considérations mécaniques qui servent de fondement à ce calcul (*voy.* particulièrement le II°. § de ce *Mémoire*), dont la difficulté réside presque uniquement, comme on sait, dans la détermination des volumes et des centres de gravité des diverses parties de la voûte.

D'un autre côté, pour le cas des berceaux cylindriques, dont nous devons ici traiter, on n'a véritablement qu'à s'occuper des aires et centres de gravité relatifs à l'un des profils transversaux de la voûte.

Enfin, le cas de rupture ordinaire se rapportant à celui où les parties supérieures s'affaissent, sous leur poids, en tournant autour de l'arête d'intrados du

joint des reins et de l'arête d'extrados du joint de la clef, c'est aussi ce cas que nous examinerons d'abord avec toute l'étendue que son importance réclame, nous réservant de montrer, dans la seconde partie de ce mémoire, comment on peut traiter les questions relatives aux autres cas ou modes de rupture des voûtes, envisagés par Coulomb et spécialement étudiés par MM. Audoy, Navier (*) et Persy (**).

PREMIÈRE PARTIE,

RELATIVE AU CAS DE RUPTURE ORDINAIRE.

Détermination des aires et des centres de gravité des voussoirs.

3. Premier cas : *Voussoirs finis.* Soit (*Fig.* 1, Pl. III) le profil d'un demi-berceau cylindrique, à intrados et à extrados quelconques, dont, pour plus de généralité, nous supposerons, quant à ce dernier, l'étendue illimitée vers les naissances ; cas qui se rapporte spécialement aux voûtes extradossées en chape ou de niveau.

Ayant divisé l'intrados $i_0 i_4 i_8$ en 8, 10 ou 12 parties égales, suivant le degré de précision qu'on veut obtenir et la courbure plus ou moins prononcée du cintre, on mènera, par les points de division $i_1, i_2, i_3, \ldots i_7$ ainsi obtenus, les normales correspondantes, qu'il

---

(*) *Application de la mécanique à l'établissement des constructions, etc.*, (2e édition, 1833, p. 196 et suiv.)

(**) *Lithographie des leçons données à l'École d'application de l'artillerie et du génie, à Metz.*

faudra prolonger, d'une certaine quantité, au-delà de l'extrados $d_0 d_4 d_7$.

On supposera d'ailleurs, provisoirement, cette voûte limitée à une verticale telle que $d_7 d_8$, appartenant à l'une des intersections d_7, des normales avec l'extrados, de manière que la distance $i_8 d_8$ diffère, le moins qu'il est possible, de l'épaisseur présumée $i_8 E$, du piédroit, en même tems que le joint $d_7 i_7$ soit assez rapproché de la naissance de la voûte, pour être certain que le *joint de rupture* des reins se trouve situé au-dessus.

Cela posé, on s'occupera à trouver l'aire et le centre de gravité de chacun des *voussoirs fictifs* dans lesquels on suppose la voûte divisée; ce qui se fera de cette manière.

4. Considérant, par exemple (*Fig.* 1 et 5), le voussoir quelconque $i_4 i_5 d_5 d_4$, on mènera, sans la tracer, par le sommet d_4, la parallèle $d_4 l_5$ à la diagonale $i_4 d_5$, qui viendra intercepter, sur la ligne de joint $i_5 d_5$ prolongée, la distance $i_5 l_5$, telle que son produit par la moitié de la corde $i_4 i_5$, sera, à très-peu de chose près (*), l'aire du quadrilatère mixtiligne $d_4 i_4 i_5 d_5$; car cette opération revient à remplacer ce quadrilatère par un triangle équivalent $i_4 i_5 l_5$, ayant $i_5 l_5$ pour base, i_4 pour sommet et $i_4 i_5$ pour hauteur, laquelle étant constante, sera désignée par a, dans tout ce qui va

(*) Pour plus d'exactitude, dans certains cas, on pourra remplacer $i_5 l_5$ par sa projection sur une perpendiculaire à l'extrémité i_5 de la corde $i_5 i_4$. D'ailleurs, en substituant la corde à l'arc, on altère légèrement les aires et les momens des voussoirs et par conséquent la poussée; mais, comme on altère, dans le même sens, le moment des résistances dues au poids de la demi-voûte, il y a sensiblement compensation.

suivre; de sorte que si l'on nomme, en même temps, l_5 la longueur $i_5 l_5$, $\frac{1}{2}a.l_5$ sera l'aire demandée.

Quant au centre de gravité g_5 du quadrilatère, on le trouvera par ce procédé graphique fort simple: on divisera l'une quelconque $i_4 d_5$ (*Fig.* 5), des diagonales, en deux parties égales au point n; sur l'autre de ces diagonales, dont o est le point de recoupement avec la première, on portera le segment $i_5 o$ de d_4 en m, et le centre de gravité g_5 se trouvera au tiers de la distance mn à partir de n.

On peut encore, si l'on veut, prendre simultanément les milieux n, n' de chaque diagonale, et les points m et m' tels que $m'd_5 = i_4 o$ et $md_4 = i_5 o$, puis tracer les droites mn et $m'n'$ qui s'entrecouperont en g_5; en un mot, le centre de gravité du quadrilatère se confond avec celui du triangle $mm'o$.

5. Il arrive quelquefois que les voûtes sont chargées de couches de terres ou de maçonneries quelconques, qui ne sont pas censées faire corps avec les voussoirs. On suppose alors (N°. 4 du *Mémorial*), que chacun des élémens de l'extrados supporte immédiatement le poids du prisme vertical de maçonnerie ou de terre qui lui correspond. Dans le cas des terres, ce prisme peut être remplacé par un prisme de maçonnerie, de même poids, en réduisant sa hauteur dans le rapport des densités; ce qui revient proprement à remplacer le massif tout entier, de ces terres, par un massif équivalent de maçonnerie, dont le profil extérieur est facile à tracer sur l'épure de la voûte.

On a donc alors à considérer des portions de voûte, ou voussoirs fictifs, de la forme $i_4 e_4 d_4 d_5 e_5 i_5$ (*Fig.* 6); $e_4 d_4$ et $e_5 d_5$ étant des verticales limitées inférieure-

ment, au véritable extrados e_5e_4 de la voûte. Mais, dans ce cas, il convient d'opérer la division, en parties égales, sur cet extrados lui-même, afin de conserver, aux aires des voussoirs et à leurs momens, le facteur commun et constant e_4e_5, que nous désignerons encore par a.

6. Ayant déterminé, comme précédemment, les centres de gravité p et p' des quadrilatères $e_4i_4i_5e_5$, $e_4e_5d_5d_4$, et élevé, à l'extrémité inférieure e_5 de e_4e_5, la perpendiculaire indéfinie $l_5l'_5$, on mènera d_4k' parallèle à la diagonale e_4d_5, et i_4k parallèle à la diagonale e_4i_5, lesquelles rencontreront respectivement les côtés e_5d_5 et e_5i_5 prolongés, aux points k' et k, tels que les triangles e_4e_5k', e_4e_5k seront équivalens aux quadrilatères dont ils dérivent. Projetant enfin k et k' en l_5 et l'_5, sur $l_5l'_5$, par des parallèles à e_4e_5, ces mêmes quadrilatères se trouveront remplacés par les triangles équivalens $e_4e_5l_5$, $e_4e_5l'_5$, ayant pour mesure $\frac{1}{2}\, e_4e_5 \times e_5l_5$, $\frac{1}{2}\, e_4e_5 \times e_5l'_5$; de sorte que la surface entière du voussoir aura pour valeur $\frac{1}{2}\, e_4e_5 \times l_5l'_5 = \frac{1}{2}\, a \,.\, l_5$; en nommant l_5 la longueur variable $l_5l'_5$.

Quant à la détermination du centre de gravité g_5, de cette surface, elle se fera en divisant la distance pp', en parties réciproquement proportionnelles aux aires correspondantes à p et p', ou aux distances e_5l_5, $e_5l'_5$. A cet effet, on mènera, par e_5, la parallèle mm' à pp', rencontrant en m et m' les ordonnées kl_5, $k'l'_5$ déjà tracées; décrivant ensuite les droites mp, $m'p'$ se coupant en s, puis se_5 qui coupe pp' en o, il ne restera plus qu'à porter op de p' en g_5, pour obtenir le centre de gravité demandé.

Ces opérations présentent quelques longueurs attendu leur répétition, mais elles n'amèneront, avec

elles, aucune confusion, si l'on a soin de ne tracer, au crayon et d'une manière effective, que les droites pp', $l_5l'_5$, km et $k'l'_5$; lignes qu'on pourra d'ailleurs toutes effacer, sauf $l_5l'_5$, quand une fois le point g_5 aura été obtenu.

7. Deuxième cas : *Voussoirs infiniment petits.* Si on voulait considérer des voussoirs d'une épaisseur infiniment petite, épaisseur qu'on peut alors désigner par da, conformément aux principes du calcul différentiel, il n'y aurait que fort peu de chose à changer aux constructions précédentes, qui d'ailleurs se simplifieraient.

Pour le cas de la *Fig.* 5, par exemple, où l'on supposerait le joint d_4i_4 infiniment près du joint d_5i_5, et toujours dirigé vers le centre c_5 de l'arc $i_4i_5 = da$, on devra prendre, pour centre de gravité du quadrilatère correspondant, le milieu g'_5 du joint i_5d_5, et, pour la surface de ce quadrilatère, le produit de d_5i_5 par l'arc infiniment petit qui, décrit du point c_5, comme centre, avec $c_5g'_5$ pour rayon, mesure l'épaisseur moyenne du voussoir en g'_5. Or, cet arc est à l'arc infiniment petit représenté par i_4i_5 ou da, comme $c_5g'_5$ est à c_5i_5; c'est-à-dire qu'il a pour valeur $da \times \frac{c_5g'_5}{c_5i_5}$; donc la surface infiniment petite du quadrilatère, a elle-même pour mesure

$$da \cdot \frac{c_5g'_5}{c_5i_5} \times i_5d_5 = da \cdot i_5d_5\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{i_5d_5}{c_5i_5}\right) = \tfrac{1}{2}da\left(2i_5d_5 + \frac{i_5d_5 \cdot i_5d_5}{c_5i_5}\right).$$

Pour construire $\frac{i_5d_5 \times i_5d_5}{c_5i_5}$, on élèvera, au point i_5 de d_5c_5, la perpendiculaire $i_5y = i_5d_5$, et, en y, la perpendiculaire yx à la droite yc_5, laquelle interceptera, sur i_5d_5, la distance i_5x égale à la valeur demandée.

Portant donc consécutivement i_5x et d_5i_5 de d_5 en l'_5, l'aire du quadrilatère infiniment petit que l'on considère, aura pour mesure

$$\tfrac{1}{2}\,da \times i_5l'_5 = \tfrac{1}{2}\,da.l_5.$$

Pour la *Fig.* 6, les centres de gravité partiels p et p', se confondront également avec les milieux de i_5e_5 et de d_5e_5; e_5k' deviendra précisément le double de d_5e_5, et e_5k se composera de eh double de e_5i_5, moins la distance kh, qui a pour expression, c_5 étant le centre de l'arc i_4i_5,

$$\frac{e_5i_5 \times e_5i_5}{c_5e_5};$$

distance que l'on construira ainsi : élevant, à l'extrémité e_5, de c_5e_5, la perpendiculaire $e_5\gamma = e_5i_5$; puis, en γ, la perpendiculaire γx à l'extrémité de $c_5\gamma$, cette dernière interceptera, sur le prolongement de c_5e_5, la distance e_5x égale à kh.

Le reste de la construction, qui donne le centre de gravité g_5 et la distance $l_5l'_5$ à multiplier par $\frac{1}{2}\,e_4e_5 = \frac{1}{2}\,da$, s'effectuera comme au n°. 6, si ce n'est que les points p' et p sont devenus les milieux de e_5d_5, e_5i_5, ainsi qu'on l'a déjà observé.

Ces constructions sont principalement applicables au cas où l'on voudrait faire usage de la méthode des quadratures, qui sera mentionnée plus loin.

Construction des momens partiels et totaux des voussoirs.

8. Première méthode : *en supposant les voussoirs finis.* Ayant trouvé (4) les centres de gravité g_1, g_2, g_3.... (*Fig.* 1) et les lignes i_1l_1, i_2l_2, i_3l_3,.... proportionnelles aux aires des voussoirs fictifs de la voûte, il sera

facile de trouver les momens mêmes des poids que représentent ces dernières, par rapport à un point ou à une verticale quelconque du plan du profil; verticale que nous supposerons d'abord confondue avec celle Cjd_0, du joint qui répond au sommet de la voûte, parce que les momens relatifs à une autre verticale quelconque, dérivent, comme on le verra bientôt, par une loi très-simple, des momens qui se rapportent à celle dont il s'agit.

Projetons tous les centres de gravité g_1, g_2, g_3.... sur l'horizontale indéfinie CE des naissances; il en résultera les nouveaux points g'_1, g'_2, g'_3,..., et il s'agira, pour obtenir le moment du voussoir $d_4i_4i_5d_5$, par exemple, de construire graphiquement le produit

$$\tfrac{1}{2}i_4i_5 \times l_5l_5 \times Cg'_5 = \tfrac{1}{2}a \times l_5 \times Cg'_5.$$

Mais, comme le facteur a (4) est commun, soit aux aires, soit aux momens, nous le laisserons en dehors de chaque produit, pour ne nous en occuper qu'à la fin des opérations partielles. On portera donc l'unité linéaire, ou de l'échelle du dessin, de C en O, sur la verticale Cj; puis, afin d'éviter la confusion des lignes, on choisira, à droite du point C (*Fig.* 2), sur le prolongement de EC, un nouveau point C', à partir duquel on portera, sur la verticale correspondante, les distances $C's_1$, $C's_2$, $C's_3$... respectivement égales à la moitié (*) de celles i_1l_1, i_2l_2, i_3l_3... (*Fig.* 1).

Cela posé, concevant, sans les tracer, les droites Og'_1, Og'_2, Og'_3..., on leur menera respectivement,

(*) Dans le cas de l'épure, on a opéré sur les distances entières, afin d'obtenir plus d'exactitude : ainsi celles $C'm_1$, $C'm_2$, ... qui s'en déduisent, doivent être réduites à la moitié de leur grandeur naturelle. Mais, comme on a pris aussi $CO = 4$, il faut les doubler.

par les points correspondans s_1, s_2, s_3..., les parallèles s_1m_1, s_2m_2, s_3m_3..., qui rencontreront l'horizontale CC' aux points m_1, m_2, m_3..., tels que C'm_1, C'm_2, C'm_3..., seront, d'après l'échelle du dessin, les valeurs numériques des produits mentionnés ci-dessus, puisque les triangles rectangles COg'_5 et C's_5m_5, par exemple, étant semblables, on aura

$$Cg'_5 : CO = 1 :: C'm_5 : C's_5; \text{ d'où } C'm_5 = C's_5 \times Cg'_5.$$

Généralement, pour éviter la trop grande obliquité des lignes Og'_6, Og'_7, Og'_8...., on prendra CO égale, au moins, au plus grand nombre d'unités linéaires ou de mètres entiers contenus dans le demi-diamètre Ci_8 de la voûte. Supposant, par exemple, ce demi-diamètre de 4^m,0625, ce qui est le cas de l'épure, on prendra, d'après l'échelle du dessin, CO = 4^m : ainsi le quadruple des distances C'm_1, C'm_2, C'm_3.... représentera, dans cette hypothèse, les *momens proportionnels* des voussoirs respectifs dont C's_1, C's_2, C's_3,... exprimeraient les aires ou volumes.

9. Maintenant, si l'on veut obtenir les sommes de ces aires ou de ces momens, qui constituent l'aire ou le moment total d'une portion de voûte quelconque comprise (*Fig.* 1) entre le joint de la clef i_0d_0 et un joint donné i_8d_8, on n'aura qu'à réunir bout à bout, d'une part, les distances C's_1, C's_2,..., jusqu'à C's_5, d'une autre, les distances C'm_1, C'm_2...., jusqu'à C'm_5, inclusivement; ce qui se fera très rapidement, soit avec le compas, soit au moyen d'une feuille de papier fort, plié ou coupé en ligne droite, et qu'on présentera successivement vis-à-vis des distances dont il s'agit et dans leur ordre de succession naturel.

En poussant le relèvement de ces mêmes distances, jusqu'à celles $C's_s$ et $C'm_s$, qui répondent au joint horizontal de la voûte, on aura l'ensemble de toutes les sommes demandées, dont celles des momens devront être quadruplées, d'après nos hypothèses.

10. Dans l'épure de la Pl. III, ces mêmes distances se trouvent portées respectivement sur les prolongemens indéfinis de la verticale Cj et de l'horizontale jH (*Fig.* 1), passant par le sommet j du bandeau véritable de la voûte; à savoir : les distances $C's_1$, $C's_2$,... (*Fig.* 2), de j en S_1, de S_1 en S_2,... sur cette verticale, et les distances $C'm_1$, $C'm_2$,... de j en M_1, de M_1 en M_2,... sur cette horizontale (*).

Mais, comme les lignes jS_s et jM_s, qui représentent les sommes entières des aires et des momens de la demi-voûte, pourront, dans certains cas, acquérir des longueurs qui dépassent les limites du dessin, et qu'elles doivent entrer dans les opérations graphiques subséquentes, on fera bien alors de les réduire, toutes, dans une même proportion, par exemple à la moitié ou au tiers; ce qui s'exécutera encore graphiquement et d'une manière très-simple, par les méthodes connues, à moins qu'on ne préfère, pour l'exactitude et dans le cas des grandes épures, dresser, d'après l'échelle, deux tables : l'une des valeurs numériques des longueurs $C's_1$, $C's_2$.... (*Fig.* 2), ou i_1l_1, i_2l_2.... (*Fig.* 1), l'autre des valeurs pareilles des longueurs $C'm_1$, $C'm_2$....; ce qui se fera aussi très-rapidement en appliquant successivement l'échelle

(*). D'après l'observation de la note du n°. 8 qui précède, toutes ces distances ont été réduites préalablement à la moitié de leurs grandeurs naturelles.

ou étalon gradué, le long de $C's_s$ et de $C'm_s$, de manière à faire coïncider son zéro avec le point C'.

Ajoutant ensuite, dans chaque table ou colonne, le 2e. nombre au 1er., le 3e. au résultat, le 4e. au second résultat, et ainsi de suite, on se formera deux nouvelles tables ou colonnes, des sommes numériques demandées, qu'il ne s'agira plus que de réduire dans des proportions convenables, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus. Toutefois on se rappellera que les valeurs linéaires des momens des voussoirs ont déjà été divisées par un nombre qui, ici, est 4.

11. Deuxième méthode : *par les quadratures*. Si on veut obtenir les mêmes nombres au moyen des méthodes de quadrature mentionnées au n°. 7, notamment par la méthode attribuée à Thomas Simpson, le procédé devra être très-peu modifié.

En effet, au lieu (6 et 8) de la somme des quantités finies $\frac{1}{2}a.l_s$, $\frac{1}{2}a.l_s.\ Cg'_s = 4a.C'm_s$, par exemple, on aura à faire (7) celles de quantités infiniment petites, telles que $\frac{1}{2}da.l_s$, $\frac{1}{2}da.l_s.\ Cg'_s = 4da.C'm_s$, dont les facteurs l_s, Cg'_s et $C'm_s$, bien qu'obtenus par des procédés analogues, seront néanmoins très-différens.

Or, si l'on trace les courbes $s_0s_1s_2\ldots$, $m_0m_1m_2\ldots$ (*Fig.* 7), qui ont pour abscisses communes les *longueurs développées* des arcs (4 et 5) a, $2a$, $3a\ldots$, et pour ordonnées respectives, les facteurs $\frac{1}{2}l_0$, $\frac{1}{2}l_1$, $\frac{1}{2}l_2$, $\ldots, 0, 4C'm_1, 4C'm_2, \ldots$, mentionnés en dernier lieu (*),

(*) La *Fig.* 7 a été réellement construite par les procédés en question, appliqués aux données de la *Fig.* 9, mais les ordonnées a_1m_1, $a_2m_2\ldots$ n'y ont que la moitié de leur véritable grandeur, de sorte que les résultats qui les concernent doivent être doublés.

la question consistera évidemment à trouver les aires comprises entre ces courbes, l'axe $a_0 a_5$ et les ordonnées indéfinies correspondant à a_0 et à un point de division quelconque a_4 ou a_5. Le tracé de ces courbes étant donc effectué, et ayant intercalé, entre les ordonnées consécutives de chacune d'elles, de nouvelles ordonnées équidistantes comme le montre la *Fig. 7*, on devra, d'après la méthode dont il s'agit, procéder de cette manière.

On ajoutera l'ordonnée du point a_0 à celle du point a_1, et au quadruple de l'ordonnée intermédiaire; ce qui donnera, pour premier résultat, la valeur approchée et proportionnelle de l'aire du trapèze mixtiligne répondant à $a_0 a_1$, c'est-à-dire du poids ou du moment du premier voussoir à partir de la clef. Ajoutant, à ce résultat, les ordonnées des points a_1 et a_2, plus 4 fois l'ordonnée intermédiaire, on aura la valeur proportionnelle du poids ou du moment des deux premiers voussoirs. Ajoutant, de nouveau, à ce second résultat, les ordonnées de a_2, a_3 et 4 fois l'ordonnée intermédiaire, on obtiendra la valeur proportionnelle du poids ou du moment total des trois premiers voussoirs, et ainsi de suite; après quoi il ne restera plus qu'à multiplier tous les résultats par le facteur commun $\frac{1}{3}d$, pour obtenir la valeur absolue des aires et des momens des différentes portions de la voûte proposée.

12. Quand les ordonnées des courbes dont il s'agit, se trouvent, comme dans le cas précédent, exprimées numériquement au moyen d'une table, rien n'est plus facile que d'exécuter les opérations successives dont il vient d'être parlé. Mais, s'il s'agit d'opérer graphiquement, il faudra s'y prendre ainsi.

Ayant tracé les cordes s_0s_1, s_1s_2,.... et m_0m_1, m_1m_2,...., on déterminera, à partir de chaque courbe et sur la direction des ordonnées intermédiaires, des points σ_1, σ_2,... et μ_1, μ_2...., situés au tiers de l'intervalle compris, sur ces ordonnées, entre chaque corde et l'arc correspondant; les nouvelles ordonnées $\alpha_1\sigma_1$, $\alpha_2\sigma_2$,..., multipliées par la constante a, donneront la mesure approchée des aires trapézoïdes qui leur appartiennent, et il ne s'agira plus que de les placer bout à bout, comme au n°. 9, pour obtenir les longueurs proportionnelles aux aires et aux momens des portions de voûtes correspondantes (*).

En effet, si nous considérons (*Fig.* 8) le trapèze mixtiligne $a_4a_5m_5n_5m_4$, dont l'ordonnée intermédiaire coupe en o_5 et n_5, respectivement, la corde et l'arc, puis qu'on prenne $n_5\mu_5=\frac{1}{3}n_5o_5$, on aura

$$a_5\mu_5=a_5o_5-\tfrac{2}{3}o_5n_5=\tfrac{1}{2}(a_4m_4+a_5m_5)-\tfrac{2}{3}\left\{\tfrac{1}{2}(a_4m_4+a_5m_5)-a_5n_5\right\}$$
$$=\tfrac{1}{6}(a_4m_4+a_5m_5+4a_5n_5);$$

ce qui justifie la méthode proposée.

Recherche du maximum de la poussée et du joint de rupture.

13. Lorsqu'on a ainsi obtenu, avec la précision convenable, les aires des différentes parties de la voûte et leurs momens par rapport à la verticale de la clef,

---

(*) C'est ce qui a été fait sur la verticale et l'horizontale passant par le sommet j de l'extrados de la voûte représentée (*Fig.* 9), où l'on a $jS'_2=a_1\sigma_1+a_2\sigma_2$, $S'_2S'_3=a_3\sigma_3$ ....., et $j\mu'_2=2(a_1\mu_1+a_2\mu_2)$, $\mu'_2\mu'_3=2a_3\mu_3$, etc.

on peut procéder, avec certitude et d'une manière très-simple, à la recherche du point de rupture de l'intrados des reins, auquel correspond (N°. 4 du *Mémorial*, page 14, art. 2) le maximum des valeurs de la force horizontale qui, appliquée au sommet j (*Fig.* 1) de l'extrados véritable de la voûte, serait capable de maintenir en équilibre, contre l'action de la pesanteur, une portion quelconque $i_0 d_0 i_5 d_5$, de cette voûte, qui tendrait à se précipiter, en dedans, en pivotant simultanément sur l'arête i_5 du joint inférieur et l'arête supérieure j, de la clef.

14. *Première méthode directe et générale.* Nommant F_5 la force horizontale dont il s'agit, x_5 la projection du point d'intrados i_5 sur la verticale Cj, de la clef, et observant (9) que $a \times jS_5$, $4a \times jM_5$ sont l'aire et le moment, déjà trouvés, de $i_0 d_0 d_5 i_5$, ce dernier étant pris par rapport à la verticale Cj, on aura, d'après les principes connus, pour le moment de cette même portion de voûte, par rapport au point i_5, $a\,(jS_5 \times i_5 x_5 - 4jM_5)$, et par conséquent

$$F_5 = a\left(\frac{jS_5 \times i_5 x_5}{jx_5} - \frac{4jM_5}{jy_5}\right).$$

Pour construire $jS_5 \times \frac{i_5 x_5}{jy_5}$, on tracera (*Fig.* 3) l'horizontale de S_5, qui rencontrera le prolongement de ji_5 (*Fig.* 1), au point σ_5 (*Fig.* 3), tel que

$$S_5\sigma_5 = jS_5 \times \frac{i_5 x_5}{jy_5}.$$

Portant (*Fig.* 2) 4 fois l'unité linéaire, de j en K, sur la verticale Cj, la droite $K\mu_5$, parallèle à celle

$x_s M_s$, et qu'il est inutile de tracer ici, rencontrera l'horizontale, en j, au point μ_s, tel qu'on aura

$$j\mu_s = \frac{4jM_s}{j\gamma_s},$$

Enfin, portant (*Fig.* 3) la distance $j\mu_s$ sur l'horizontale ou ordonnée $S_s\sigma_s$, de σ_s en φ_s, on aura

$$F_s = a \times S_s\varphi_s.$$

Opérant de même, pour les points de division i_3, i_4, ...i_7 (*Fig.* 1), voisins des reins où doit se trouver le joint de rupture, on obtiendra la suite des points φ_3, φ_4, ...φ_7 (*Fig.* 3), appartenant à une courbe dont la plus grande des ordonnées répond évidemment au joint du maximum de poussée, et exprime, à l'échelle du dessin, la valeur même de cette poussée divisée par le facteur constant a.

15. Ces constructions ne présenteront aucune confusion sur le dessin ni aucune difficulté d'exécution, puisqu'elles consistent dans la répétition des mêmes opérations; mais il convient de présenter quelques remarques qui tendent à faciliter leur application et à assurer l'exactitude des résultats.

Ainsi, par exemple, nous recommanderons, pour le cas des grandes épures, de préférer, à l'emploi de l'équerre et de la règle pour tracer, par le point K, les parallèles aux lignes M_3x_3, M_4x_4...., la méthode qui consiste à déterminer la position de ces parallèles, par la construction d'angles ou d'arcs égaux. Cette méthode n'a pas seulement l'avantage de la précision dans tous les cas où les parallèles à considérer sont très-longues ou très-distantes les unes des autres, mais encore celui d'être alors plus expéditive.

La même remarque s'applique à la construction des diverses parallèles mentionnées jusqu'à présent, ou qui pourront l'être par la suite. Néanmoins, il sera avantageux, dans quelques cas, de se servir de la propriété qu'ont les parallèles d'être équidistantes, pour déterminer, sur le champ, leurs intersections avec des lignes données, sans les tracer, et à l'aide d'une simple ouverture de compas, égale à leur plus courte distance, etc.

Enfin, si l'on veut obtenir les points de la courbe $\varphi_3\varphi_4\varphi_5\ldots$, par exemple φ_5, sans l'intermédiaire de ceux de la courbe $\sigma_3\sigma_4\sigma_5\ldots$, on pourra porter $j\mu_5$, en sens contraire, sur le prolongement jH', de l'horizontale de la clef, et mener, par le point ainsi obtenu, une parallèle à $i_5 j$, qui rencontrera l'horizontale en S_5, au point φ_5 demandé, sans qu'il soit nécessaire de tracer autre chose que cette horizontale.

Peut-être, même, sera-t-il convenable de construire immédiatement les nouveaux points μ_4, μ_5,..., par des droites tracées, dans l'angle HjS$_4$, symétriquement à celles Kμ_4, Kμ_5,..., qui déterminent les premiers dans l'angle opposé CjM$_7$, etc.

Ces observations ne sont d'aucune importance quant aux figures de la Pl. III, construites à l'échelle, très-petite, de 8 millim. pour 1 mètre; mais elles ont été avantageusement mises en usage dans l'établissement de l'épure primitive, qui a été tracée à l'échelle de $\frac{1}{10}$ de la grandeur naturelle, et dont celle-ci offre la réduction en petit.

16. La portion de la courbe $\varphi_3\varphi_4\varphi_5\ldots$. (*Fig.* 3), qui répond aux reins de la demi-voûte, étant ainsi trouvée, on jugera, sans difficulté et d'après le sentiment

de la continuité, entre quels points de cette courbe, ou quels joints de la voûte, doit se trouver le maximum demandé. Si cette ligne a peu de courbure, ou qu'elle présente une forme aplatie, telle que l'indique la figure, ce qui a presque toujours lieu, la valeur de l'ordonnée maximum $S\varphi$, relative à la poussée, sera déterminée d'une manière suffisamment rigoureuse pour l'objet en question, puisque la position réelle du joint de rupture n'est pas ce qui intéresse le plus (*), et il ne restera qu'à multiplier cette ordonnée maximum, par la valeur correspondante du facteur a, pour obtenir la grandeur effective de la poussée.

On voit, d'après cela, combien il importe de déterminer, avec soin, la constante a, ou les points de division équidistans, qui lui correspondent (4 et 5) sur l'intrados ou l'extrados de la voûte.

Sous ce rapport comme sous celui de l'exactitude en général, on fera bien d'exécuter la *Fig.* 1re. sur une feuille à part et dans les plus grandes proportions possibles, sauf ensuite à réduire, à une échelle convenable, les données qui en résultent (9). Peut-être aussi fera-t-on bien de se donner la longueur de la corde a,

(*) Si on veut la déterminer avec quelque précision, on mènera, à la courbe, la tangente verticale mn, et une suite de cordes parallèles à cette tangente; déterminant, pour chacune de celles-ci, les sommets des couples de triangles équilatéraux et symétriques auxquels elles servent de base, la suite de ces sommets formera une courbe dont l'intersection avec la proposée, correspondra au point de maximum demandé, et fera connaître sur-le-champ, (*Fig.* 1 et 3), le point i de la corde $i_4 i_5$, qui appartient à la ligne du joint de rupture. A cet effet, il ne s'agira que de mener, par l'intersection σ, de $S\varphi$ et de la courbe $\sigma_3\sigma_4\sigma_5\ldots\ldots$, la droite σj, dont le prolongement ji contiendra évidemment (14) le point demandé, auquel répond le joint de rupture id.

à priori, par une ouverture de compas fixe, en la prenant d'un certain nombre rond de millimètres; puis de déterminer, en conséquence, les points de division i_1, i_2, i_3... (*Fig.* 1), en s'arrêtant à celui qui est le plus voisin, en dessus ou en dessous, de la naissance de la voûte, etc.

17. Lorsque les ordonnées de la courbe $\varphi_2\varphi_3\varphi_4$...., offrent un accroissement rapide vers le maximum, il devient à propos, pour l'exactitude, de resserrer davantage les opérations dans l'intervalle qui lui correspond. Le tracé approximatif de la courbe fera connaître entre quelles ordonnées il tombe; supposant, par exemple, que ce soit entre les ordonnées $S_4\varphi_4$ et $S_5\varphi_5$, on divisera en deux ou quatre parties egales (*Fig.* 1), la corde correspondante i_4i_5, de l'intrados de la voûte; traçant les voussoirs fictifs correspondans, on aura à exécuter, pour chacun d'eux, les opérations indiquées précédemment; ce qui ne sera ni long ni difficile, si l'on a soin de donner, à chacun des produits représentant une aire ou un volume, le facteur commun a, qui appartient aux voussoirs entiers.

D'ailleurs, si l'on opère par les quadratures (11), et que les courbes de la *Fig.* 7 ne laissent aucune incertitude dans leur tracé, l'intercalation de nouvelles ordonnées entre celles $S_4\varphi_4$ et $S_5\varphi_5$ (*Fig.* 3), dont il s'agit, se fera sur-le-champ, à l'aide du tracé d'un très-petit nombre de lignes, et sans recourir, de nouveau, aux constructions des n^os^. 4 et suiv.

18. *Deuxième méthode, par la considération des infiniment petits.* Bien que ces opérations, pour déterminer la poussée maximum, soient en elles-mêmes

fort simples, il ne sera pourtant pas inutile de présenter ici quelques considérations théoriques tendant à les abréger encore plus, dans certains cas.

Soit, en effet, id (*Fig.* 9), la position inconnue du joint de rupture, et $x = ix$, $y = jx = iy$, l'abscisse et l'ordonnée du point i, par rapport à la verticale et à l'horizontale du sommet j de l'extrados de la voûte; enfin soient S et M, en général, l'aire et le moment, par rapport à Cj, du voussoir supérieur d_0dii_0 correspondant à id, la poussée horizontale en j, sera donnée (14) par le maximum de l'expression

$$F = \frac{Sx - M}{y},$$

qui, étant différentiée par rapport à x, en y faisant varier à la fois M, S et y, puis égalée à zéro, servira, en même temps, à fixer la position du point de rupture cherché i.

Or, cette différentiation donne l'équation

$$S(ydx - xdy) + xyd\mathrm{S} + \mathrm{M}dy - yd\mathrm{M} = 0,$$

dans laquelle dS représente l'aire infiniment petite $ii'd'd$ relative à un très-petit déplacement, ii', du point i, et dM le moment de cette aire, par rapport à la verticale Cj; c'est-à-dire le produit de dS par la distance gg', du milieu de id, à cette verticale.

Nommant donc e l'épaisseur di de la voûte en i, ds l'arc infiniment petit ii', r son rayon de courbure, g la distance gg', on aura (7)

$$d\mathrm{S} = eds\left(1 + \frac{e}{2r}\right), \quad d\mathrm{M} = gd\mathrm{S} = geds\left(1 + \frac{e}{2r}\right) = gds\left(e + \frac{e^2}{2r}\right).$$

Substituant dans l'équation différentielle, et divisant par dy, elle deviendra

$$S\left(y\frac{dx}{dy}-x\right)+M-y\left(e+\frac{e^2}{2r}\right)\frac{ds}{dy}(g-x)=0.$$

Mais, si l'on mène, au point i, une tangente à la courbe d'intrados; elle ira rencontrer l'horizontale jy, du sommet de l'extrados, en un point t, tel qu'on aura évidemment

$$jt=x-y\frac{dx}{dy}.$$

D'une autre part, si l'on abaisse, des points d et g, les verticales dp, gh sur ix prolongée, on aura

$$g-x=hi=\frac{1}{2}ip, \qquad (g-x)\frac{ds}{dy}=\frac{1}{2}\frac{ip}{\cos.(eip)}=\frac{1}{2}e;$$

et, par suite,

$$y\left(e+\frac{e^2}{2r}\right)\frac{ds}{dy}(g-x)=\frac{1}{2}\left(e^2+\frac{e^3}{2r}\right)y, \quad -S.jt+M-\frac{1}{2}\left(e^2+\frac{e^3}{2r}\right)y=0;$$

ce qui donne finalement, pour la condition propre à déterminer le joint de rupture i,

$$jt=\frac{M-\frac{1}{2}\left(e^2+\frac{e^3}{2r}\right)y}{S}.$$

Portant, pour chacun des joints id de la voûte, la valeur ainsi trouvée sur la verticale de t, la suite des points qui en résulteront formera une certaine courbe, rencontrant la droite menée, par j, sous un angle de 45°, en un point qui correspondra au maximum cherché de F.

19. Par hypothèse, on a dressé les tables des valeurs proportionnelles de S et M, correspondant à diverses positions du point i; on sera donc en état de trouver celle, de ces positions, qui appartient au joint de rupture de la voûte; mais on se rappellera

(11 et 12) que les nombres de ces tables ou les lignes qui les représentent et que nous désignons ici, en général, par S′ et M′, doivent être tous multipliés par le facteur constant a. Remplaçant donc, dans la relation ci-dessus, M et S par $a \times M'$, $a \times S'$, on aura réellement à calculer l'expression

$$jt = \frac{M' - \frac{1}{2a}\left(e^2 + \frac{e^3}{2r}\right)y}{S'},$$

pour chacune des positions du joint i; ce qui ne sera ni long ni difficile.

Néanmoins, si l'on veut n'opérer que graphiquement, on négligera la quantité $\frac{e^3}{2r} = \frac{e}{2r}e^2$, très-petite vis-à-vis de e^2, et qui compliquerait inutilement la construction. Portant d'ailleurs $2a$, de i en a, sur le prolongement de la tangente it, on mènera $d\sigma$ perpendiculaire à da, qui donnera, sur cette même tangente, $i\sigma = \frac{e^2}{2a}$; abaissant, de i, la verticale $iy = \dot{y}$, sur l'horizontale en j; portant également l'unité linéaire, de i en o, sur it; menant enfin $\sigma\alpha$ parallèle à oy et rencontrant iy en α, on aura $i\alpha = \frac{e^2 y}{2a}$, et partant

$$jt = \frac{M' - i\alpha}{S'}.$$

La construction de cette dernière grandeur, ne souffrira maintenant aucune difficulté; car, ayant déjà porté, par hypothèse (12, note), les valeurs linéaires de S′ sur la verticale jS'_5, de j en S'_2, en S'_3..., et celles de M′, sur l'horizontale $j\mu'_5$, de j en μ'_2, en μ'_3..., on n'aura, pour obtenir le numérateur, qu'à retrancher, de chacune de celles-ci, la valeur de $i\alpha$ qui lui cor-

respond; ce qui donnera les nouveaux points $\alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4 \ldots$, conjugués aux points $\mu'_2, \mu'_3, \mu'_4 \ldots$.

Portant donc l'unité linéaire, de j en k, sur la verticale de la clef; menant par k, des parallèles aux droites respectives $\alpha'_3 S'_3$, $\alpha'_4 S'_4$, $\alpha'_5 S'_5, \ldots$, elles détermineront, sur la direction de jy, une série de points tels que 6, qui n'ont point été rapportés sur la *Fig.* 9, afin d'éviter la confusion, et dont il faudra comparer la position à celle des points t, de même numéro; car, s'il y a coïncidence pour l'un ($t6$) de ces couples de points, le joint *id*, qui lui correspond, sera le joint de rupture cherché.

Mais, comme cette coïncidence pourra n'avoir lieu rigoureusement pour aucun de ces couples, on fera bien de porter leurs écartemens respectifs sur les ordonnées verticales tt' des points t; ce qui fournira une *courbe d'erreurs* $t'_2 t'_3, \ldots t'$, dont l'intersection avec jy, donnera la position cherchée de t, et, par suite, de i.

20. Il est sans doute inutile de dire que, dans toutes ces constructions, comme dans celles qui précèdent, on doit, afin d'éviter la confusion des lignes, ne tracer aucune des parallèles dont il y est fait mention, et se borner à numéroter, dans leur ordre, les intersections qu'elles donnent. Ainsi, par exemple, pour déterminer $i\alpha$, on n'a qu'à tracer, d'une manière effective, la tangente it et la verticale iy, etc.

Lorsque, d'ailleurs, on aura ainsi obtenu la position du point de rupture i, il restera à calculer la valeur correspondante de la poussée maximum F, au moyen de la relation

$$F = \frac{Sx - M}{x} = a\left(\frac{S'x}{x} - \frac{M'}{y}\right)$$

et des valeurs particulières de x et de y, relatives à

cette position ; ce qui se fera numériquement ou graphiquement par le procédé du n°. 14.

21. Dans le cas où les valeurs de $\frac{e^2\gamma}{2a}$ seront très-petites vis-à-vis de celles de M'_1, ou celles de $\frac{1}{2}e^2y$ vis-à-vis des valeurs correspondantes du moment de la portion de voûte dii_1d_0, on pourra se contenter de prendre

$$j\iota = \frac{M}{S} = \frac{M'}{S'};$$

ce qui dispensera de construire $i\iota$, et simplifiera beaucoup la recherche du joint de rupture.

Mais, attendu que le rapport, de M à S, n'est autre chose que la distance du centre de gravité de la portion de voûte dont il s'agit, à la verticale jC, on voit que le point de rupture i, est tel alors que sa tangente va rencontrer l'horizontale du sommet de l'extrados, au même point que la verticale du centre de gravité de ii_1d_1d : théorème analogue à celui qui a été démontré, par MM. Lamé et Clapeyron, (*Mémoire sur la stabilité des voûtes*, tom. 8, des *Annales des Mines*, 1823), en se fondant sur l'hypothèse que les différens plans de joints sont verticaux.

Ce qui précède suppose d'ailleurs que ces mêmes plans de joints soient prolongés jusqu'à leur rencontre avec la surface qui limite la voûte intérieurement ; s'il en était autrement, la méthode devrait être modifiée, mais les constructions auxquelles on parviendrait alors ne seraient pas plus simples que celles qui consistent à déterminer l'ordonnée maximum de la courbe $\varphi_0\varphi_1\varphi_2\ldots$ (*Fig.* 3) ; c'est pourquoi nous n'insisterons pas.

Détermination de l'épaisseur des piédroits de la voûte.

22. Premièrement, *par le calcul.* Revenons à la *Fig.* 1re., et rappelons-nous qu'on a provisoirement supposé la demi-voûte limitée à la verticale $d_1 d_2$, plus ou moins voisine de la face extérieure du piédroit, et telle qu'elle réponde à un joint $d_1 i_1$, situé nécessairement au-dessous du joint de rupture des reins; ce qui est indispensable pour que cette supposition ne puisse pas influer sur la détermination ultérieure de ce dernier joint et de la poussée.

Cette considération serait d'ailleurs inutile si les limites de la voûte, vers la verticale dont il s'agit, étaient prescrites à l'avance, ou si, l'extrados ayant une forme déterminée, on était conduit à supposer que les joints se replient verticalement dans la surcharge; nous avons voulu ici nous arrêter à un cas qui offrît une sorte d'indétermination, et qui se rapporte particulièrement aux voûtes, en chape, des magasins à poudre.

23. Soit k le *coefficient de stabilité*, c'est-à-dire le nombre par lequel on doit multiplier le maximum de la poussée, relative à l'équilibre strict, pour obtenir celle à laquelle doivent résister, en effet, les piédroits, afin d'acquérir le surcroît de stabilité qui convient au genre et à la destination de l'édifice. D'après M. le colonel Audoy (*Mémorial*, N°. 4, §VIII, p. 75 et suiv.), ce nombre doit être pris égal à 2,06 ou 2,00 pour les voûtes militaires à l'épreuve de la bombe; à 1,9 ou 1,8 environ, pour les voûtes des grands ponts; mais on pourra le réduire, sans inconvénient, de quelque chose, pour les voûtes d'intérieur des édifices ordinaires,

dont l'épaisseur, à la clef, varie entre 20 et 50 centimètres : dans le cas actuel, nous prendrons $k = 2$.

Nommons $a.\varphi = F$, la valeur de la poussée théorique, obtenue comme il a été expliqué dans ce qui précède; de sorte que, par exemple, φ représente (16) la plus grande $S\varphi$, des ordonnées de la courbe $\varphi_3\varphi_4\varphi_5\ldots$ (*Fig.* 3), et a la corde constante (4) des arcs qui mesurent l'épaisseur des voussoirs fictifs, sur la courbe d'intrados (*Fig.* 5), ou d'extrados (*Fig.* 6), corde ici égale à i_1i_2, i_2i_3,.... (*Fig.* 1); $k.a.\varphi$ sera la valeur de la poussée à laquelle doivent résister les parties inférieures de la voûte.

Désignons de même, en général, par $4a.M_s$, $a.S_s$ le moment, par rapport à la verticale Cj, de la clef (*Fig.* 1), et la surface de la demi-voûte $i_0i_8d_8d_7d_0$, supposée limitée à la verticale d_8d_7; moment et surface déjà calculés, et dont les facteurs M_s, S_s, sont représentés (9) par les lignes jM_s, jS_s (*Fig.* 3).

Soit pareillement H la hauteur Cj (*Fig.* 1), au-dessus des naissances, du sommet j de l'extrados, auquel on suppose la poussée appliquée; B la demi-ouverture Ci_8 de la voûte; h la hauteur Bi_8 ou AE de son piédroit; h' celle de la verticale d_7d_8; b sa distance d_8i_8 à la face intérieure Bi_8 de ce piédroit; enfin I l'angle de l'élément Dd_7 de la chape ou surcharge avec cette même verticale, et x la distance inconnue $Ed_8 = Ad_7$ de cette dernière, à la face extérieure AD du piédroit.

Le moment du poids total de la demi-voûte et du piédroit, par rapport à l'arête A, se composera

1°. de celui de la portion dd_8i_8B, de ce piédroit, dont la valeur est $hb(x+\frac{1}{2}b)$;

2°. de celui de l'autre portion Add_1D de ce piédroit, et qui a pour valeur totale

$$\tfrac{1}{2}(h+h')x^2 - \tfrac{1}{6}\cot.(l)\,x^3 ;$$

3°. enfin, de celui de toute la portion de voûte $d_2i_2i_0d_0d_1$, dont l'expression est évidemment

$$aS_8(B+b+x) - 4aM_8 .$$

Égalant la somme de ces momens à celui $ka\varphi(H+h)$ de la poussée, augmentée ainsi qu'on l'a dit, on aura, en négligeant le terme en cot. (l), comme très-petit vis-à-vis des autres (*),

$$(h+h')x^2 + 2(aS_8+bh)x = 2ka\varphi(H+h) + 8aM_8 - 2a(B+b)S_8 - hb^2 ;$$

d'où l'on tire, pour la surépaisseur cherchée $Ed_8 = Ad$,

$$x = -\frac{aS_8+bh}{h+h'} + \sqrt{\left(\frac{aS_8+bh}{h+h'}\right)^2 + 4a\left\{\frac{1}{2}k\varphi\frac{H+h}{h+h'} + \frac{2M_8}{h+h'} - \frac{1}{2}S_8\frac{B+b}{h+h'} - \frac{b^2h}{4a(h+h')}\right\}} .$$

Si on voulait tenir compte du terme en cot.(I), qui exerce réellement peu d'influence, il faudrait, après avoir calculé une première valeur approchée de x par la formule qui précède, substituer cette valeur dans l'expression $\frac{2}{6}\frac{\cot.(I)x^3}{h+h'}$, qu'on ajouterait, sous le radical, pour calculer une seconde valeur plus approchée de x; mais la différence qui en résulterait serait tout-à-fait insignifiante dans les cas d'application ordinaires.

(*) Ce terme représente le moment du triangle formé par l'hypothénuse Dd_1, par l'horizontale du point d, et le prolongement de la verticale AD.

24. Deuxièmement, *d'une manière purement graphique.* La méthode la plus exacte et la plus simple d'obtenir x est, sans contredit, de substituer, dans la formule, les valeurs numériques des quantités qui y entrent, surtout quand il s'agit d'une épure à grande échelle; mais on peut aussi opérer graphiquement ainsi qu'il suit.

On portera (*Fig.* 1), sur l'horizontale indéfinie AB', qui représente la surface de fondation des piédroits, 4 fois a' et 1 fois a, de d, en a' et en a; puis, de d en φ, $\frac{1}{2}k = 1$ fois l'ordonnée maximum $S\varphi$ de la courbe $\varphi_1\varphi_4\varphi_5\ldots$ (*Fig.* 3); enfin l'unité linéaire de l'échelle du dessin, de d, au point n.

On portera semblablement, à partir de d, sur la verticale indéfinie dd_7: 1°. la distance $dM = 2\mathbf{M}_8 = 2jM_8$ (*Fig.* 2 et 3); 2°. les distances dS, dS' respectivement égales à $\mathbf{S}_8$, $\frac{1}{2}\mathbf{S}_8$ ou $j\mathbf{S}_8$, $\frac{1}{2}jS_8$ (*Fig.* 3); 3° la distance $dH = \mathrm{H} + h$, et qui est naturellement donnée par le prolongement de l'horizontale en j. Enfin on remarquera que $\mathrm{B} + b$ est précisément égal à dB', et que si, du point d, comme centre, avec $dB = b$ pour rayon, on décrit un cercle, puis qu'on mène, à ce cercle, une tangente du point a', l'abscisse db, de son point de contact, aura précisément pour valeur la quantité $\frac{b^2}{4a}$, qui entre en facteur dans le dernier terme du radical.

Cela posé, on mènera, sans les tracer,

1°. par le point S_7 la parallèle Ss à d_7a, rencontrant BB' en s; ce qui donne

$$ds = \frac{a\mathbf{S}_8}{h + h'};$$

2°. par le point E où la verticale en s, rencontre l'horizontale EC des naissances, la parallèle Ll à d_7B, rencontrant BB' en l, ce qui donne

$$sl=\frac{b.h}{h+h'},$$

et, par suite,

$$ds+sl=dl=\frac{aS_6+bh}{h+h'};$$

3°. par le point H, la parallèle Hh à $d_7\varphi$, rencontrant BB' en h; ce qui donne

$$dh=\frac{1}{2}k\varphi\frac{H+h}{h+h'};$$

4°. par le point M, la parallèle Mm à d_7n, rencontrant BB' en m; ce qui donne

$$dm=\frac{\frac{1}{2}M_6}{h+h'};$$

5°. par le point S', la parallèle $S's'$ à d_7B', rencontrant BB' en s'; ce qui donne

$$ds'=\frac{1}{2}S_6\frac{B+b}{h+h'};$$

6°. enfin par le point d_6, la parallèle d_6b' à d_7b, rencontrant BB' en b'; ce qui donne

$$db'=\frac{b^2h}{4a(h+h')}.$$

D'après cela, la valeur de x devient (*)

$$x=-dl+\sqrt{(dl)^2+da'(dh+dm-ds'-db')}.$$

(*) Le tracé des parallèles Ss, Hh, Mm, $S's'$, d_6b', aux droites respectives d_7a, $d_7\varphi$, d_7n, d_7B', d_7b, pouvant embarrasser à cause de leur longueur, on l'évitera en prolongeant ces dernières jusqu'à leurs rencontres respectives avec les horizontales en S,

Pour la construire, on portera $dh+dm-ds'-db'=b'm-hs'$, de d en t, sur le prolongement de dB; décrivant, sur la distance ta', comme diamètre, un demi-cercle rencontrant la verticale de d, en ν, on aura

$$(d\nu)^2=da'(dh+dm-ds'-db'),$$

et la droite $l\nu$ sera la valeur du radical, laquelle étant portée, de l en A, par l'arc de cercle Aν concentrique à l, donnera finalement le point A, qui appartient à la face extérieure du piédroit.

Il est à remarquer d'ailleurs que, quand hs' surpasse, au contraire, $b'm$, leur différence absolue dt, doit être portée à droite de d; $d\nu$ remplacé par la tangente menée, de d, au cercle qui a ta' pour diamètre; et $l\nu$ par une autre tangente au cercle décrit, de d, avec la première pour rayon. Ainsi le point A tombe alors en dedans de dB; ce qui tient à ce qu'on a pris la verticale d_7d_8 au delà de la position naturelle de la face extérieure du piédroit.

Épaisseur de la voûte aux naissances, limites de l'épaisseur des piédroits.

25. Supposant, dans les constructions et la formule ci-dessus, h ou la hauteur du piédroit, égale à zéro, elles donneront l'épaisseur Ei_8, que doit avoir la voûte à sa naissance, pour résister à l'action de la

---

H, M, S' et d_8, car les distances qu'elles intercepteront, sur ces horizontales, à compter des points dont il s'agit, seront précisément égales aux longueurs as, φh, nm, $B's'$, et bb'.

Dans le cas où la hauteur $dd_7=h+h'$ sera très-petite, on pourra, pour l'exactitude, la doubler ou la tripler, pourvu qu'on double et triple, en même temps, $da=a$, $da'=\frac{1}{4}a$, enfin $dd_8=h$, sans changer $dH=H+h$; ce qui n'altérera nullement la valeur de dA.

On pourrait réduire pareillement, les longueurs dM, dS, dS', afin d'éviter l'incertitude dans le tracé des parallèles, etc.

poussée; épaisseur qui sera toujours inférieure à celle du piédroit, et qui se construira graphiquement en remplaçant d_7 par un point situé, au-dessus de d, à une distance verticale h', égale à $d_7 d_8$. On pourra d'ailleurs, pour plus d'exactitude, doubler et tripler cette distance conformément à ce qui est indiqué dans la note de l'article précédent.

26. Supposant pareillement $k=1$, ces mêmes constructions, ou la formule, feront connaître la plus petite des épaisseurs que doivent recevoir la voûte, à sa naissance, et son piédroit pour n'être point complétement culbutés; ici il n'y aura qu'à remplacer le point φ de AB′, dans la dernière partie des constructions du n°. 24, par un nouveau point situé à une distance, de d, égale à $\frac{1}{2}d\varphi$.

27. Enfin supposant h infini, on aura

$$x=-b+\sqrt{2ka\varphi}, \quad \text{ou} \quad x+b=\text{AB}=\sqrt{2kF};$$

résultat déjà connu (*voy.* le *Mémoire* précédent de M. Petit, N^os^. 17, 27, etc.), qui s'applique à toutes les voûtes en berceau, et fait connaître la limite supérieure des épaisseurs de leurs piédroits.

Cette limite est, comme on voit, entièrement indépendante de la disposition des parties de la voûte, situées au-dessous du joint de rupture des reins, et elle se construira d'une manière très-simple, en menant, du point d, au cercle dont $\varphi a'$ (*Fig.* 1) est le diamètre, une tangente ayant pour longueur la valeur cherchée de AB.

28. Lorsque la forme extérieure de la voûte est indépendante de l'épaisseur de ses piédroits, la considération de la verticale $d_7 d_8$, comme limite provisoire

des parties latérales de cette voûte, devient inutile; et, si l'on veut continuer à se servir de cette droite comme d'un axe auxiliaire pour les constructions, on devra supposer, dans celles-ci, que le point d_1 est confondu avec le point d_2, et, dans la formule analytique qui donne x, que $h' = 0$; sans que, du reste, il y ait rien à changer à cette formule et à ces constructions.

Néanmoins, dans le cas où l'on voudra vérifier si l'épaisseur de la voûte, à la naissance, est suffisante pour résister à l'action de la poussée, il arrivera que, devant supposer, à la fois, $h' = 0$ et $h = 0$ dans l'expression de x, cette expression deviendra infinie ou illusoire, aussi bien que toutes les constructions qui servent à la traduire géométriquement.

L'équation qui donne x (23), perdant alors son terme en x^2, donnera, sans radical,

$$x = k\varphi \frac{H}{S_2} + 4\frac{M_2}{S_2} - B - b,$$

ou (*Fig.* 1), $x + b = AB = 2\dfrac{d\varphi \times d_2 H}{dS} + 2\dfrac{dM}{dS} - BB'$,

pour l'épaisseur que doit avoir la voûte aux naissances, afin qu'elle y possède un degré de stabilité marqué par le coefficient $k = 2$.

Ce qui précède rend d'ailleurs la construction graphique de cette épaisseur si facile, que je crois inutile d'insister. Je me contenterai de remarquer que, si l'épaisseur réelle de la voûte aux naissances, était moindre que celle dont il s'agit, il suffirait de l'augmenter par une addition de maçonnerie faisant corps avec les parties inférieures de cette voûte, et

telle qu'elle ne pût altérer en rien la valeur de la poussée; ce qui exige simplement qu'elle ne soit pas prolongée au delà de la position du joint de rupture. Cette addition, en effet, ne faisant qu'accroître la stabilité des parties dont il s'agit et des piédroits, il deviendra inutile de recommencer la série des opérations sur de nouveaux frais.

Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir sur ces considérations, dans le n°. 30 ci-après.

DEUXIEME PARTIE,

RELATIVE AUX AUTRES MODES DE RUPTURE DES VOÛTES, ET A L'APPRÉCIATION DU DEGRÉ DE STABILITÉ QUI S'Y RAPPORTE.

29. Ce qui précède (3 à 15) fournit tous les élémens graphiques nécessaires pour traiter, avec rapidité et simplicité, les différentes questions qu'on s'est proposées sur la stabilité et l'équilibre des voûtes.

A la vérité, le cas le plus ordinaire de rupture se rapportant à celui qui vient d'être traité en détail, il arrivera rarement que l'on soit obligé de vérifier les conditions de l'équilibre relatives aux autres genres principaux de mouvement que pourrait éprouver une voûte dont les dimensions, ainsi que celles de ses piédroits, auraient été réglées d'après l'usage ou selon les principes des n°s. 22 et suivans.

Mais il est, dans tous les cas, au moins intéressant de pouvoir faire cette vérification, et le calcul,

d'accord en cela avec l'expérience, montre qu'elle est même indispensable dans certaines circonstances où il arrive que les voûtes se rompent, soit par le soulèvement des parties supérieures, tournant alors autour des arêtes d'intrados de la clef et d'extrados des reins, soit par le glissement, de ces mêmes parties ou des parties inférieures, sur le joint des reins ou sur celui des naissances. C'est pourquoi il ne sera pas inutile de montrer avec quelque détail, comment on devra appliquer les procédés graphiques à ces différentes circonstances, en commençant par celles qui sont simplement relatives à la rotation des voussoirs.

Vérifier la stabilité d'une voûte donnée, relativement à la rotation des voussoirs.

3o. Ier cas. *Les parties supérieures s'abaissent en tournant.* La vérification, pour ce cas, résulte immédiatement des moyens mêmes par lesquels nous sommes parvenus à régler l'épaisseur des piédroits et de la voûte, vers la naissance, afin de procurer au système un degré de stabilité donné; mais on peut envisager la chose plus généralement.

En effet, il suffit de s'assurer que le moment de la poussée F, ou force horizontale qui agit virtuellement, au sommet de l'extrados, pour repousser en dehors les parties inférieures à l'instant de la rupture effective, est plus petit que le moment du poids de la demi-voûte, avec ou sans piédroit, par rapport aux arêtes extérieures de rotation. Considérant, en particulier, la stabilité de la demi-voûte sur sa naissance CE

(*Fig.* 1), et conservant d'ailleurs les dénominations du n°. 23, il faudra qu'on ait

$$F\times Cj = a\varphi\times Cj < aS_s\times CE - 4aM_s \quad \text{ou} \quad \varphi < S_s\frac{CE}{Cj} - 4\frac{M_s}{Cj};$$

relations dans lesquelles S_s et M_s se rapportent à la totalité de la demi-voûte; ce qui exige qu'on ajoute, à l'aire et au moment du voussoir fictif $i_7i_8d_8d_7$, limité à la verticale d_7d_8, l'aire et le moment de la partie Ed_8d_7D, terminée à la chape et à la verticale extérieure du piédroit (*).

(*) On n'a pas construit, sur l'épure (*Fig.* 2 et 3), ces nouvelles valeurs de S_s et M_s, parce que la longueur S_7S_8 qui représente l'aire du voussoir $i_7i_8d_7d_8$ (*Fig.* 1), aurait dû être augmentée d'une quantité égale à Ed_8 environ, et qui eût excédé les bornes de la planche; mais, outre que cette construction n'offre, en soi, rien de difficile, on doit encore observer que la vérification de la condition de stabilité dont il s'agit, est ici de nul intérêt.

En effet, d'une part, la stabilité autour du point E, surpasse évidemment celle qui se rapporte à l'arête extérieure A, de la base du piédroit; et, d'une autre, il y a tout lieu de croire que le massif inférieur de la voûte se diviserait en dedans du joint de naissance Ei_8, avant que la rotation s'établisse autour du point E.

Or, ceci devant arriver toutes les fois que le massif $Ei_8i_7d_7D$ n'est pas parfaitement lié dans ses différentes parties, et notamment quand les assises de la voûte n'y sont pas exactement prolongées, ce ne sera plus le point E, qu'il faudra prendre pour le centre de rotation, mais bien quelque point intérieur du joint de naissance, tel, par exemple, que d_8 ou celui qui répond à l'extrados même du bandeau de la voûte, en ayant égard à l'action de la partie extérieure, à peu près comme l'a fait M. Audoy (*Mémorial*, N°. 4, *p.* 86), pour les contreforts du magazin de Vauban.

La même remarque peut s'appliquer, en général, à chacun des joints suivans, i_7d_7, i_6d_6 et i_5d_5, de la voûte; c'est pourquoi, au lieu de prendre d_7, d_6, d_5 pour points de rotation extérieurs des voussoirs, comme on l'a supposé au n°. 31, on devrait en choisir qui fussent plus rapprochés de l'extrados véritable de cette voûte. Mais, quels que soient ceux auxquels on s'arrête, la marche du procédé graphique ne sera nullement changée.

31. Plus généralement, la condition dont il s'agit doit être remplie pour un joint quelconque distinct de celui de la naissance, et notamment pour le joint relatif au minimum de la force horizontale qui, appliquée à l'extrados j de la clef, serait capable de soulever la portion supérieure correspondante de la voûte, en la faisant tourner, d'une seule pièce, sur l'arête d'extrados de ce joint; force qui mesure évidemment l'énergie absolue de la résistance que la voûte oppose, par son poids, à l'action de la poussée.

Mais ce minimum, facile à découvrir au moyen (14) d'une nouvelle courbe analogue à celle $\varphi_3\varphi_4\varphi_5$....., et pour laquelle il n'y aurait qu'à remplacer (*Fig.* 1 et 3), dans le tracé des lignes $j\sigma_3$, $j\sigma_4$, $j\sigma_5$,..., les points d'intrados i_1, i_2, i_3.... par ceux d'extrados d_1, d_2, d_3,..., ce minimum, disons-nous, correspond précisément au joint de naissance dans tous les cas de pratique; ce qui dispense de construire la courbe tout entière, et permet de se borner à la considération de son ordonnée extrême $S_6\pi_6$, ayant $jS_6 = S_6$ pour abscisse, et qui n'est autre (14 et 23) que la valeur de

$$S_6\frac{CE}{Cj} - 4\frac{M_6}{Cj}.$$

Ces diverses observations sont applicables exactement aux piédroits qui, dans la question présente, doivent être considérés comme faisant partie de la voûte entière, et peuvent être traités graphiquement par les mêmes procédés; mais, à moins qu'ils n'aient une forme toute particulière et compliquée, il suffira d'envisager leur stabilité d'une manière directe, ainsi qu'on l'a fait aux nos. 22 et suiv., d'autant plus que

leur épaisseur est presque toujours considérée comme la véritable inconnue du problème.

32. Enfin, il est à remarquer que l'excès

$$aS_s \times CE - 4aM_s - a\varphi \times Cj,$$

du moment de la demi-voûte sur celui de la poussée, mesure le surcroît de stabilité de celle-là, relatif au mode de rupture envisagé, et que ce moment est précisément celui de la force qui, appliquée en un point quelconque de cette même demi-voûte, serait capable d'en produire le renversement, conjointement avec la poussée, dans le cas où il y aurait naturellement excès de stabilité.

33. II°. CAS. *Les parties supérieures s'élèvent en tournant.* Ce cas se présente uniquement pour les voûtes surhaussées, très-élégies vers le sommet, et très-surchargées près des reins, ainsi qu'il arrive pour certaines voûtes gothiques ou en ogives.

Ici les parties supérieures de la voûte agissent (*Mémorial*, N°. 4, art. 3; 4, 7 et 15) comme résistance pour s'opposer à l'action des parties inférieures qui tendent à culbuter en dedans : la *force active* ou *poussée*, qui se développe au sommet i_o de l'intrados, à l'instant de la rupture effective, est déterminée par l'effort horizontal nécessaire pour empêcher toute la demi-voûte de tourner autour de l'arête d'intrados i_s, du joint de naissance; et cet effort doit être inférieur au minimum de la force horizontale qui, appliquée au même sommet, serait capable de soulever une portion quelconque $i_o i_s d_s d_o$, de la partie supérieure de la demi-voûte, en la faisant tourner autour de l'arête d'extrados d_s du joint $i_s d_s$.

Or, pour obtenir ce minimum, que nous nommerons F', et le joint de rupture correspondant, il n'y a absolument autre chose à faire que de répéter les constructions des n^os. 14 et suiv., en remplaçant les points de l'extrados par ceux de l'intrados et *vice-versâ*, et notamment en substituant l'horizontale du point i_o, à celle du point j; modifications indiquées sur les *Fig.* 2, 3 et 10, par un accent (') donné aux lettres et aux lignes qui s'y rapportent.

34. Conservant d'ailleurs les dénominations et conventions des n^os. 22 et suiv., en observant que $S_s = i_o S_s$, $M_s = i_o M'_s$, n'ont pas changé de valeur, tandis que φ se trouve remplacé par l'ordonnée $S'\varphi' = \varphi'$, il y aura stabilité, et ce 2^e. mode de rupture sera impossible, si le moment $F' \times Ci_o = a.\varphi' \times Ci_o$ surpasse le moment $aS_s \times Ci_s - 4aM_s$ de la demi-voûte, par rapport à l'arête d'intrados i_s du joint de naissance; ce qui donne la condition

$$\varphi' > S_s \frac{Ci_s}{Ci_o} - \frac{4M_s}{Ci_o},$$

facile encore à vérifier graphiquement d'après le procédé du n^o. 14, modifié comme il vient d'être dit.

Si cette inégalité n'était pas naturellement et convenablement satisfaite, on pourrait épaissir ou recharger extérieurement les parties inférieures de la voûte de manière à ne pas altérer la position du joint de rupture des reins, tout en leur procurant l'excès de stabilité nécessaire; ce qui se ferait par des procédés analogues à ceux des n^os. 22 et suiv., en observant qu'ici encore, les nouvelles maçonneries doivent faire parfaitement corps avec celles de la voûte, afin qu'elles

ne puissent s'en séparer dans le mouvement de rotation autour de i_s.

Quant aux piédroits, il est évident qu'ils devront simplement résister à l'action de la poussée qui se développe au sommet j, du joint de la clef, dans le 1^er^. mode de rupture, puisque le 2^e^. est rendu physiquement impossible.

35. Plus généralement, l'inégalité ci-dessus doit être vérifiée pour l'arête d'intrados d'un joint quelconque de la voûte; ce qui exige que l'on recherche le maximum de la force horizontale qui, appliquée en i_o, serait capable d'empêcher la portion correspondante, du système, supérieure à ce joint, de tourner, du dehors au dedans, sur l'arête d'intrados dont il s'agit. Or ce maximum s'obtiendra encore au moyen d'une nouvelle courbe tracée, d'après le procédé du n°. 14, sur les mêmes abscisses que celle $\varphi'_s\varphi'_6\varphi'_7\ldots$ (*Fig.* 10), et dont les ordonnées ne diffèrent, des siennes propres, qu'en ce que les arêtes d'intrados des joints doivent, à leur tour, remplacer celles d'extrados, dans le tracé de la courbe auxiliaire $\sigma'_s\sigma'_6\sigma'_7\ldots$.

Mais, comme ce maximum correspond précisément, pour tous les cas de pratique, au joint même de naissance, cela dispense de construire la courbe tout entière, et permet de se borner, comme dans le cas de rupture précédent (31), à la simple recherche de l'ordonnée extrême $S_s\pi'_s$, de cette courbe, répondant à l'abscisse $i_oS_s=S_s$.

36. On doit encore ici remarquer que l'excès $a\varphi'\times Ci_o - aS_s\times Ci_s + 4aM_s$, du moment de F′ sur celui de la demi-voûte, mesure le *surcroît de stabilité* de celle-ci, relatif au 2^e^. mode de rupture, ou le moment

de la force qui serait capable de produire cette rupture si elle n'avait pas lieu naturellement, de la même manière (32) que l'excès $a\,S_6\times CE-4aM_6-a\varphi\times Cj$, mesure celui qui se rapporte au 1er mode.

Suivant donc qu'on aura

$$a\varphi'\times Ci_6-aS_6\times Ci_6+4aM_6 > \text{ou} < aS_6\times CE-4aM_6-a\varphi+Cj,$$

c'est à dire

$$\tfrac{1}{2}\varphi'\times Ci_6+\tfrac{1}{2}\varphi\times Cj > \text{ou} < S_6(Ci_6+\tfrac{1}{2}Ei_6)-4M_6, \quad (*)$$

c'est le 1er. ou le 2^{e}. mode de rupture qui tendra à s'établir, et auquel par conséquent il sera essentiel d'avoir égard, lorsqu'il s'agira d'assurer un degré de stabilité donné à l'équilibre de la voûte et de ses piédroits.

La vérification de ces conditions se fera par des procédés analogues à ceux qui ont été indiqués aux n^{os}. 31 et 34 ci-dessus. Voy. la *Légende explicative* à la fin de ce mémoire.

Vérifier la stabilité d'une voûte donnée, relativement au glissement sur les plans de joint.

37. 1er cas. *Les parties supérieures s'abaissent en glissant du dehors au dedans.* Ce cas, qui se rapporte spécialement aux hypothèses de Lahire, lorsqu'on néglige le frottement, comprend implicitement celui où les parties inférieures de la voûte glissent du dehors au dedans, sur les joints de naissance supposés alors fortement inclinés par rapport à la verticale : il

(*) La signification de cette inégalité semblera très-claire, si l'on remarque que le produit de son second membre, par a, mesure précisément le moment de la surface entière de la demi-voûte par rapport au point milieu du joint de naissance.

n'a lieu que pour les voûtes très-surbaissées, ou d'une petite ouverture par rapport à leur épaisseur, telles que les voûtes en plate-bande et en arc de cercle.

Soit z l'angle i_0Ci_5 (*Fig.* 1) formé, avec la verticale, par un joint quelconque i_5d_5 de la voûte; soit f le coefficient et α l'angle du frottement sur ce joint; la valeur de la force horizontale F, qui, appliquée perpendiculairement au joint i_0d_0 de la clef, pourrait empêcher la portion $i_5i_0d_0d_5$ de glisser en descendant sur i_5d_5, a pour expression (*Mémorial*, N°. 4, page 25), en négligeant, avec M. Audoy, la force de cohésion des mortiers,

$$F=aS\,\frac{\cos.z-f\sin.z}{\sin.z+f\cos.z}=\frac{aS}{\text{tang.}(z+\alpha)}=aS.\cot.(z+\alpha),$$

formule dans laquelle aS représente, suivant nos conventions précédentes (23), l'aire du voussoir $i_5i_0d_0d_5$ supposé quelconque.

D'après les expériences de Rondelet, on attribuera à f, dans les cas les plus défavorables possibles, une valeur d'environ 0,58, répondant à un angle α, de 30°, et qui doit être considérée comme un minimum, puisque les expériences de l'ingénieur anglais Rennie, lui ont donné le coefficient 0,66, pour des pierres de grès avec interposition de mortier frais.

38. Pour construire graphiquement les valeurs de F, relatives aux différens plans de joints i_1d_1, i_2d_2, i_3d_3..., on portera, de j en Q (*Fig.* 4), sur l'horizontale du sommet de l'extrados, 100 parties égales, des millimètres par exemple, et, sur la verticale en Q, l'ordonnée QN contenant 58 de ces parties: l'angle NjQ sera égal à l'angle α du frottement. On mènera ensuite,

par le même point j, les droites indéfinies $j\mathrm{i}'_1, j\mathrm{i}'_2, j\mathrm{i}'_3, \ldots$ parallèles aux lignes de joints $i_1d_1, i_2d_2, i_3d_3, \ldots$; et, ayant rapporté, à partir de j, sur la droite $j\mathrm{N}$, les distances $jS_1, jS_2, jS_3, \ldots$, de la *Fig.* 3, on élèvera, à cette même droite $j\mathrm{N}$ et aux points $s_1, s_2, s_3, \ldots$, ainsi trouvés, des perpendiculaires ou ordonnées $s_1\psi_1, s_2\psi_2, s_3\psi_3, \ldots$, limitées à celles, des parallèles dont il s'agit, qui portent respectivement les mêmes indices ou numéros; ces ordonnées, multipliées par le facteur linéaire et constant a, représenteront les valeurs correspondantes de F, dont il sera d'ailleurs inutile de considérer celles qui, étant négatives et répondant à des ordonnées situées au-dessous de l'axe $j\mathrm{N}$, appartiennent à des joints dont l'inclinaison, à l'horizon, est moindre que l'angle du frottement.

39. Le joint pour lequel la tendance au glissement, de la partie supérieure, est la plus grande, répondant à l'ordonnée maximum $\psi = s\psi$, de la courbe $\psi_1\psi_2\psi_3 \ldots$ qui unit toutes les extrémités de ces ordonnées, il est clair que le produit $a\psi$ exprime la valeur de la poussée, ou force horizontale, en vertu de laquelle les parties inférieures du système tendent à être repoussées, en dehors, soit par rotation, soit par simple glissement. Or, le point d'application, sur le joint de la clef, de cette force que nous nommerons F_r, n'est réellement indéterminé que dans le seul cas où les parties inférieures du système viennent elles-mêmes à glisser, du dedans au dehors, sans tourner.

En effet, l'intensité de cette force est donnée par l'expression

$$\mathrm{F}_r = \frac{a\mathrm{S}_r}{\text{tang.}(z_r + \alpha)} = a\mathrm{S}_r \cot.(z_r + \alpha);$$

dans laquelle z_r est l'angle $jCi = \psi j S_8$ (*Fig.* 1 et 4) du joint de rupture ird, avec la verticale, et aS_r l'aire de la partie supérieure correspondante de la demi-voûte. Or, lorsqu'il y a rotation de la partie inférieure autour de l'une ou de l'autre des arêtes E ou A, l'arête i_r, considérée comme appartenant à cette même partie, glissera le long de la face $i_r d_r$ du voussoir supérieur $i_r i_o d_o d_r$, en même temps que celui-ci descendra suivant une direction verticale, et que le joint $i_r d_r$ s'ouvrira extérieurement; cette arête i_r étant donc le seul point d'appui du voussoir dont il s'agit, sur $i_r d_r$, il faudra que le moment de F_r, par rapport à cette arête, soit égal à celui du poids de ce même voussoir; ce qui donne, pour déterminer la distance verticale de F_r à i_r,

$$F_r \times u = a\psi \times u = \frac{aS_r}{\text{tang.}(z_r + \varepsilon)} \times u = aS_r \times x_r - 4aM_r,$$

u étant cette distance, x_r celle de i_r à la verticale Cj de la clef, et enfin $4aM_r$ le moment (23) de l'aire aS_r, par rapport à cette même verticale.

De là on tire

$$u = \frac{Sx_r - 4M_r}{\psi};$$

valeur facile à construire d'après les données de l'épure, si l'on observe que l'ordonnée $S_r\varphi_r$ de la courbe $\varphi_3\varphi_4\varphi_5\ldots$ (*Fig.* 3), et qui correspond au joint actuel de rupture $i_r d_r$, a précisément (14) pour expression

$$\frac{S\,x_r - 4M_r}{y_r};$$

dans laquelle y_r représente l'ordonnée ou distance du

point i_r à l'horizontale du sommet j de la voûte, de sorte qu'on a simplement

$$u=\frac{S_r\varphi_r\times\gamma}{\psi};$$

ce qui montre que u est 4e proportionnelle à $\psi=s\psi$, à γ_r et à $S_r\varphi_r$, qui sont des lignes connues.

On arriverait d'ailleurs aux mêmes résultats, en considérant directement la pression normale et le frottement qui se développent au point i_r, forces dont la première a pour expression

$$\frac{aS_r}{\sin.(z_r+\alpha)\sqrt{1+f^2}}=\frac{aS_r\cos.\alpha}{\sin.(z_r+\alpha)},$$

et dont la résultante forme, avec la tangente au point i_r de l'intrados, un angle égal à α, dirigé au-dessus de cette tangente (*).

4o. Le point p_r, de la clef, où la force F_r agit, étant ainsi connu, il ne sera pas difficile de déterminer le degré de stabilité de la demi-voûte sur le plan de naissance Ei_s, en ayant égard au nouveau mode de rupture et à la rotation de cette demi-voûte autour de l'arête extérieure E.

Le moment de la force F_r, par rapport à cette arête, ayant pour valeur le produit $a\psi\times Cp_r$, tandis que celui de la demi-voûte entière est $aS_s\times CE-4aM_s$, on voit que,

1°. pour la stabilité, on devra avoir

$$aS_s\times CE-4aM_s>a\psi\times Cp_r,$$

(*) Il résulte de là, en conséquence, qu'on ne doit pas, comme cela se fait quelquefois à tort, supposer à la force F_r, le même point d'application qu'à l'une ou à l'autre des forces F et F', considérées précédemment (30 et 33).

condition très-facile encore à vérifier graphiquement;

2°. *l'excès de stabilité*, ou le moment de la force qui, appliquée en un point quelconque de la demi-voûte, serait capable de rompre l'équilibre, aura pour mesure

$$aS_s \times CE - 4aM_s - a\psi \times Cp_r;$$

3°. enfin, ce 3e mode de rupture, par rotation des parties inférieures avec glissement et descente des parties supérieures, est précisément celui qui tendra virtuellement à s'établir, si l'excès de stabilité dont il s'agit, est moindre que ceux qui se rapportent (32 et 36) au 1er. et au 2e. mode déjà examinés.

41. C'est par conséquent à ce 3e. mode qu'il conviendra spécialement alors d'avoir égard quand il s'agira de régler l'épaisseur des parties inférieures de la voûte et des piédroits, de manière à leur assurer un degré de stabilité assigné; ce qui se fera d'ailleurs par les mêmes procédés qu'aux nos. 22 et suivans; la question étant simplement de prendre pour valeur de la poussée, celle de la force F_r, supposée agir à la hauteur Cp_r au-dessus du plan des naissances.

Quant au cas où chacune des demi-voûtes, sollicitées par la force F_r ou toute autre, serait repoussée du dedans au dehors, en glissant sur un joint plus ou moins voisin des naissances, il rentre immédiatement dans celui que nous allons traiter à l'article suivant.

42. IIe. CAS. *Les parties supérieures s'élèvent en glissant du dedans au dehors.* Ce cas est encore plus rare que le précédent, parce qu'il suppose à la fois la voûte très-surhaussée, très-élégie vers le sommet, et allant rapidement en augmentant d'épaisseur au

droit des reins (33). Néanmoins, comme il comprend implicitement celui où les parties inférieures de la voûte seraient repoussées en glissant, du dedans au dehors, par la force horizontale de la clef, il devient important de le soumettre à un examen particulier.

La formule à employer, dans ce cas, pour déterminer la force horizontale F, capable de faire glisser, du dedans au dehors, une portion quelconque de la demi-voûte, est, d'après l'endroit déjà cité du *Mémorial*,

$$F = aS\frac{\cos z + f\sin.z}{\sin.z - f\cos z} = \frac{aS}{\text{tang.}(z-\alpha)} = aS\cot.(z-\alpha).$$

43. Pour construire cette expression, qui ne diffère de la précédente (37) que par le signe du coefficient ou de l'angle du frottement, on tracera, au-dessous de l'horizontale jQ (*Fig.* 1 et 4), et symétriquement à jN, la droite jN', à l'égard de laquelle on répétera toutes les opérations déjà effectuées (38) relativement à la première. Cela donnera lieu à une nouvelle courbe $\psi_5\psi_7'\psi_6'\ldots$, (*Fig.* 11), à branches infinies, dont une partie seulement se trouve rapportée sur l'épure, parceque les ordonnées positives, de l'autre partie, en excèdent les limites.

L'ordonnée la plus courte de cette courbe, représentant la plus petite F' des valeurs positives de la force horizontale F, la pression qui s'engendrerait à la clef, à l'instant de la rupture, devra être moindre que la valeur $a.\psi'$ de la force F' dont il s'agit, sans quoi cette pression serait, en effet, capable de faire glisser, du dedans au dehors, une portion plus ou moins grande de la demi-voûte, et qui généralement

comprendra cette demi-voûte tout entière, attendu que la plus petite des ordonnées positives de la nouvelle courbe correspondra presque toujours au joint horizontal même $i_8 d_8$ des naissances, comme cela a précisément lieu dans le cas de notre épure.

44 S'il en est réellement ainsi, c'est-à-dire si le joint de naissance répond effectivement à la plus petite $s'_8\psi'_8$ des ordonnées de la courbe $\psi'_3\psi'_4\psi'_5\ldots$, il suffira, pour que le glissement soit empêché, que la valeur correspondante

$$F'_r = fa S_8,$$

de F, qui exprime le frottement dû au poids total aS_8 de la voûte, surpasse la plus grande des poussées relatives aux trois précédens modes de rupture; et notamment il faudra que l'ordonnée $s'_8\psi'_8$ surpasse les ordonnées maximums des courbes $\psi_3\psi_4\psi_5\ldots$ (*Fig.* 4) et $\varphi_3\varphi_4\varphi_5$ (*Fig.* 3).

On sait d'ailleurs que, lorsque cette condition n'est pas naturellement remplie, on parvient à s'opposer au glissement, soit en augmentant la charge qui pèse immédiatement sur les joints de naissance; soit en reliant solidement, par des goujons ou des pierres à crossettes, les assises supérieures des piédroits avec les coussinets de la voûte.

45. Dans les cas fort rares où le joint qui répond au minimum F'_r, se trouvera situé vers la partie supérieure de la demi-voûte, deux modes de rupture seulement seront possibles : l'un dans lequel la partie inférieure à ce joint, tendra simplement à glisser, du dehors au dedans (37), sur un joint voisin de celui de la naissance; l'autre, dans lequel cette même partie

inférieure tendra à culbuter, également du dehors au dedans, en tournant sur l'arête d'intrados i_s de ce dernier joint, et sur l'arête d'extrados d_s du joint $i_s d_s$, représentant le joint de rupture supérieur.

Pour le premier de ces cas, l'équilibre exige évidemment encore que l'ordonnée minimum de la courbe $\psi_s\psi_7\psi_6\ldots$. (*Fig.* 1 et 4) surpasse l'ordonnée maximum de la courbe $\psi_1\psi_2\psi_3$.

Pour le second cas, la force horizontale F'_r, correspondante à cette ordonnée et qui est simplement (33) résistante, devra être capable d'empêcher la rotation de la demi-voûte autour de l'arête d'intrados du joint de rupture le plus bas, joint qui, généralement, se confondra avec celui de naissance, et dont il sera, dans tous les cas, facile de trouver la position d'après ce qui a été indiqué au n°. 35.

46. Nommant ici u' la distance de cette force horizontale à l'arête d'extrados du joint de rupture supérieur, déterminé comme il a été dit (43) et que nous supposerons encore confondu avec $i_r d_r$; x'_r la distance de cette même arête d_r, à la verticale de la clef; enfin aS'_r, $4aM'_r$ l'aire et le moment, par rapport à cette verticale, de la partie supérieure au joint $i_r d_r$, on trouvera, comme au n° 39, pour fixer la position du point d'application de $F'_r = a.\psi'$,

$$u' = \frac{S'_r \times x'_r - 4aM'_r}{\psi'};$$

distance qu'il sera encore très-facile de construire graphiquement.

Désignant par p' le point d'application dont il s'agit, le moment de la force F'_r par rapport au joint de

naissance aura, pour valeur, le produit $a\psi \times Cp'$; et, comme le moment de la demi-voûte entière est $aS_s \times Ci_s - 4aM_s$, on voit que,

1°. pour la stabilité, on doit avoir

$$aS_s \times Ci_s - 4aM_s < a\psi \times Cp' ;$$

2°. l'excès de stabilité, ou le moment de la force capable de rompre l'équilibre, a pour mesure

$$a\psi \times Cp' - aS_s \times Ci_s + 4aM_s ;$$

3°. le mode de rupture dont il s'agit, est précisément celui qui tendra à s'établir, si cet excès de stabilité est moindre que ceux (32, 36 et 40) qui se rapportent aux trois principaux modes de rupture déjà examinés dans ce qui précède.

47. Quant aux moyens d'assurer, à la voûte, un degré de stabilité donné, lorsqu'elle en est naturellement dépourvue, il consiste ici simplement, comme au n°. 34, à épaissir extérieurement les parties inférieures de cette voûte, etc.

Il se présente, à ce sujet, une question importante : c'est de savoir dans quelle proportion on doit ainsi augmenter la stabilité relative à chaque mode de rupture. Sans vouloir entreprendre cette discussion délicate, nous ferons cependant remarquer qu'en adoptant la règle proposée, pour cet objet, par M. Audoy (23), relativement au mode de rupture le plus ordinaire, il semble naturel de donner, à la voûte, un excès de stabilité équivalent, par rapport aux divers autres modes, si déjà elle ne le possède par elle-même, et si les causes de rupture, prévues pour ces derniers modes, sont également dangereuses, ou peuvent offrir le même degré d'énergie, le même

moment (32). Or, cela est très-facile puisque nous avons appris, dans ce qui précède, à évaluer graphiquement l'excès ou degré de stabilité relatif à chaque mode de rupture.

Manière de tenir compte de la force de cohésion des mortiers sur les plans de joints.

48. Nous n'avons, d'après l'exemple généralement adopté, nullement tenu compte de la force de cohésion des mortiers qui unissent les voussoirs; il existe néanmoins quelques circonstances particulières où il devient intéressant de le faire, ne serait-ce que pour apprécier le rôle que cette force peut jouer dans certaines constructions existantes. C'est pourquoi il ne sera pas hors de propos de montrer comment on peut y parvenir, sans compliquer par trop le tracé de l'épure.

Considérant, en particulier, le cas où la partie supérieure $d_3 i_3 i_0 d_0$ (*Fig.* 1), de la voûte, tend à s'abaisser sous l'action de son poids en tournant simultanément autour des arêtes i, et j des joints $i_3 d_3$ et $i_0 d_0$, on aura, en conservant les notations souvent employées (23, 39, 46) à retrancher, du moment $aS_3 x_3 - 4aM_3$, de ce poids, par rapport à la première de ces arêtes, la somme des momens des forces de cohésion qui s'opposent, perpendiculairement à la direction des joints dont il s'agit, au mouvement de rotation du voussoir $i_3 d_3 d_0 i_0$. Mais, afin de simplifier un peu la question, nous supposerons que le joint de rupture $i_3 d_3$ se prolonge, en ligne droite, dans l'épaisseur de la surcharge des reins, et que l'on néglige les effets de la cohésion pour toute l'étendue du petit massif

qui surmonte l'extrados de la clef, dans la voûte en chape, que nous avons choisie comme exemple particulier.

49. Nommant γ la cohésion sur l'unité de surface des joints, Π la densité ou le poids de l'unité de volume de la maçonnerie, $H+h$ (23) la hauteur du point d'application de la poussée au-dessus de la base des piédroits, e_3, e_0, les largeurs respectives des joints d_3i_3, ji_0, et conservant toujours à x_3, y_3, F_3, M_3 et S_3 les mêmes significations, on obtient, pour la nouvelle expression de la force horizontale F_3, appliquée en j,

$$F_3 = aS_3\frac{x_3}{y_3} - 4a\frac{M_3}{y_3} - \frac{\gamma}{3\Pi}\left\{\frac{e_3^2+e_0^2}{y_3}\right\} + \frac{\gamma}{3\Pi}\frac{e_0^2}{(H+h)}, \text{ (*)}$$

(*) On est conduit inévitablement à ce résultat, par le principe des vitesses virtuelles, en considérant, à la fois, la cohésion sur le joint de rupture des reins et sur celui de la clef, et en supposant, conformément aux idées de Mariotte et de Leibnitz, que cette force est proportionnelle à sa distance du point de rotation de chaque joint. La justification de ce résultat n'a de difficulté qu'en ce qui concerne le second de ces joints dont on a coutume de ne pas s'occuper. Or on doit observer que la résultante des forces élémentaires $\frac{\gamma}{\Pi}\frac{e}{e_0}de$, qui agissent le long de ji_0, pour s'opposer au mouvement de rotation en j, et dont le moment, par rapport à ce point, est évidemment $\int_0^{e_0}\frac{\gamma}{\Pi}\frac{e^2}{e_0}de = \frac{\gamma}{3\Pi}e_0^2$, peut, quant à ce mouvement, être remplacée par une force horizontale $\frac{\gamma e_0^2}{3\Pi y_3}$, supposée appliquée à l'arête d'intrados, i_3, du joint inférieur; et, comme celle-ci s'oppose, en même temps, à l'action de la force F_3, dans sa tendance à renverser tout le système de la demi-voûte et du piédroit autour de l'arête extérieure de la base de ce dernier, avec un bras de levier $H+h-y_3$, tandis que celui de F_3 est $H+h$, on voit que, par rapport à ce mouvement, elle doit, à son tour, être remplacée par une force horizontale $\frac{\gamma e_0^2(H+h-y_3)}{3\Pi y_3(H+h)}$

ou

$$F_3 = a\varphi_3 - \frac{\gamma}{3\Pi}\left(\frac{e'^2_3 + e'^2_0}{y_3}\right) + \frac{\gamma}{3\Pi}\frac{e'^2_0}{(H+h)} = a\left\{\varphi_3 - \frac{\gamma}{3\Pi a}\left(\frac{e'^2_3 + e'^2_0}{y_3} - \frac{e'^2_0}{H+h}\right)\right\},$$

en nommant, de plus, φ_3 l'ordonnée $S_3\varphi_3$ de la courbe $\varphi_3\varphi_4\varphi_5$..... (*Fig.* 3), qui représente la valeur de $\frac{aS_3x_3}{y_3} - \frac{4aM_3}{y_3}$, relative au point de rotation i_3.

5o. Pour construire le terme

$$\frac{\gamma}{3\Pi a}\left(\frac{e'^2_3 + e'^2_0}{y_3} - \frac{e'^2_0}{H+h}\right),$$

on tracera, à gauche et en dehors des *Fig.* 1 et 4, afin d'éviter la confusion, une nouvelle verticale indéfinie $C'j'$ (*Fig.* 12), sur laquelle on projetera les points de division i_1, i_2, i_3..... de l'intrados, par le prolongement des horizontales qui ont déjà servi à déterminer les points x_1, x_2, x_3..... sur la verticale Cj de la clef; ce qui donnera les nouveaux points x_1, x_2, x_3, ... auxquels on joindra le point x_0 projection de i_0. Prolongeant d'ailleurs indéfiniment l'horizontale, en j, au-delà de son point de rencontre j' avec $C'j'$, on prendra, sur x_0i_0, x_0e_3 égale à l'une quelconque, i_3d_3, par exemple, des longueurs de joints de la voûte, représentées par e_3, dans la formule; portant ensuite $j'e_3$ de j' en d'_3,

---

agissant en j, pour résister à celle dont il s'agit, conjointement avec la force qui est capable de vaincre la cohésion, sur le joint inférieur i_3d_3, avec le bras de levier y_3, et dont l'expression connue (*Voy.* l'ouv. cité de M. Navier, nos. 292 et 329) est $\frac{\gamma}{3\Pi}\frac{e'^2_3}{y_3}$.

Cela donne donc, pour résistance totale, la quantité

$$\frac{\gamma e'^2_0(H+h-y_3)}{3\Pi y_3(H+h)} + \frac{\gamma e'^2_3}{3\Pi y_3} = \frac{\gamma}{3\Pi}\frac{(e_0'^2+e'^2_3)}{y_3} - \frac{\gamma}{3\Pi}\frac{e_0'^2}{(H+h)},$$

rapportée dans le texte, et qui fait dépendre la position du joint de rupture des reins, de la hauteur de la voûte et de celle du piédroit.

et menant $d'_3\varepsilon_3$ perpendiculaire à l'extrémité de $x_4\delta'_4$, elle interceptera, sur le prolongement de la verticale Cj'', la distance

$$j''\varepsilon_3=\frac{e_3^2+e_0^2}{\gamma_3},$$

de laquelle il faudrait retrancher la quantité $\frac{e_0^2}{H+h}$, non moins facile à construire.

Mais, comme cette quantité est constante, elle n'influera en rien sur la position du maximum de F_3; et, comme elle est toujours fort petite, on pourra la négliger complètement; de sorte qu'il ne restera plus à construire que le produit

$$\frac{\gamma}{3\Pi}\times\frac{j''\varepsilon_3}{a};$$

ce qui se fera ainsi.

On portera, d'après l'échelle de l'épure, la valeur de $\frac{\gamma}{3\Pi}$, réduite en nombre, et que nous avons prise ici égale à $\frac{6000^k}{3\times 2000^k}=1$, de j' en γ, sur le prolongement de jj''; puis une fois a, de j' en n, sur le prolongement de Cj''; menant, par ε_3, la parallèle $\varepsilon_3\delta_3$ à $n\gamma$, elle rencontrera le prolongement de jj'' en un point δ_3, tel qu'on aura évidemment

$$j''\delta_3=\frac{\gamma}{3\Pi}\times\frac{j''\varepsilon_3}{a}=\frac{\gamma}{3\Pi a}\left(\frac{e_3^2+e_0^2}{\gamma_3}\right).$$

Il ne restera donc plus qu'à retrancher cette longueur de l'ordonnée correspondante, $S_3\varphi_3$ (*Fig.* 3), de la courbe $\varphi_3\varphi_4\varphi_5\ldots$, pour obtenir, au facteur constant près a, la nouvelle valeur $S_3\varphi_3^c$ de la force horizontale F_3: et, si l'on opère de la même manière pour les autres joints de la voûte, il en résultera la

courbe $\varphi_3\varphi_4\varphi_5\ldots$, qui fera connaître la position du joint de rupture et la valeur maximum de la poussée relatives aux hypothèses actuelles.

51. Quant à l'influence de la cohésion lors de la rupture par glissement, on en tiendra compte en ajoutant aux valeurs de F, construites aux n°s. 38 et 43, la quantité

$$\mp\frac{\gamma e}{\Pi(\sin.z\pm f\cos.z)}\quad\text{ou}\quad\mp a\times\frac{\gamma}{\Pi}\frac{e\cos.\alpha}{a.\cos.(z\pm\alpha)},\ (*)$$

dont les signes supérieurs se rapportent au cas du n°. 37 et les signes inférieurs à celui du n°. 42.

Pour construire la première de ces expressions, relative à la valeur e_2 de e, par exemple, on prendra (*Fig.* 12), sur le prolongement de jj',

$$j'\gamma'=\frac{\gamma}{\Pi}=3\frac{\gamma}{3\Pi}=3\text{ fois }j\gamma,$$

et, sur le prolongement de Cj', afin d'éviter la confusion, $j'n'=2j'n$, $j'e'_2=2e_2=2x_0e_2$; menant, par e'_2, la parallèle $e'_2\delta'_2$ à $\gamma'n'$, elle interceptera, sur $j'\gamma'$, prolongé, la distance

$$j'\delta'_2=\frac{\gamma}{\Pi}\times\frac{e^2}{a}.$$

Menant enfin la perpendiculaire indéfinie $\delta'_2\lambda'_2$ à la droite jN (*Fig.* 4), qui forme, avec l'horizon, un angle

(*) On remarquera que ces formules s'appliquent uniquement au cas où il y a rupture par glissement, sans rotation; dans le cas contraire (39 et 46), il faudrait les remplacer par d'autres un peu plus compliquées, et qui se déduiraient aisément du principe des vitesses virtuelles; mais, comme on aura rarement occasion de les appliquer, nous nous dispenserons de les rapporter ici, de même que celles qui peuvent servir alors à faire connaître le bras de levier de la force F, ou son point d'application.

α égal à celui du frottement, elle rencontrera la perpendiculaire $j'\lambda_2$ à la ligne de joint $i_2 d_2$ (*Fig.* 1) ou à sa parallèle ji'_2 (*Fig.* 4), en un point λ_2, tel qu'on aura évidemment, par le triangle $j'\delta'_2\lambda_2$,

$$j'\lambda_2 = j'\delta'_2 \frac{\cos.\alpha}{\cos(z+z)} = \frac{\gamma e_2 \cos.\alpha}{\text{fia}\cos.(z+\alpha)}.$$

Cette longueur étant donc retranchée de celle de l'ordonnée correspondante $s_2\psi_2$, de la courbe $\psi_2\psi_3\psi_4$.... (*Fig.* 4), on obtiendra, au facteur près a, la nouvelle valeur de la force horizontale F, considérée au n°. 37. Répétant successivement ces opérations pour tous les autres points de la courbe dont il s'agit, il en résultera une nouvelle courbe qui donnera le maximum de F; mais, comme elle se trouve ici entièrement située au-dessous de l'axe des abscisses jN, ce qui annonce que la poussée est une véritable résistance, nous n'avons pas cru nécessaire d'en construire aucune partie.

On opérera absolument de la même manière pour obtenir le maximum des valeurs de F, qui se rapportent au n°. 42, si ce n'est que les nouvelles longueurs $j'\lambda'_2$ devront être ajoutées à celles des ordonnées correspondantes, au lieu d'en être retranchées, etc.

Nota. Ce mémoire était terminé par des considérations spéciales sur la stabilité des voûtes semblables, sur l'influence de leur constitution physique et sur l'application du principe des vitesses virtuelles aux questions qui concernent, en général, la stabilité des édifices; la crainte d'allonger par trop, nous oblige à supprimer ces considérations que nous avons tenté d'appliquer à l'appréciation des effets du choc des bombes, et sur lesquelles nous comptons avoir occasion de revenir par la suite.

LÉGENDE EXPLICATIVE

DES FIGURES ET DES CONSTRUCTIONS CONTENUES DANS LA PLANCHE III.

SOLUTION USUELLE, RELATIVE AU MODE DE RUPTURE ORDINAIRE DES VOÛTES (*Fig.* 1, 2 et 3).

Fig. 1 (Partie au-dessus des naissances). *Opérations préliminaires* (3 à 6). (*)

Profil du magasin de Vauban (*Mémorial*, N°. 4, pag. 85), choisi pour exemple de l'application de la Méthode. — $i_0 i_4 i_8$, intrados de la demi-voûte divisé en 8 parties égales par les lignes de joints *fictives* $i_1 d_1$, $i_2 d_2$, $i_3 d_3$.... — $d_7 d_8 d$ verticale à laquelle on suppose provisoirement cette demi-voûte et le piédroit limités latéralement, et qui est conduite par le point de division le plus bas, d_7, de l'extrados. — $i_1 l_1$, $i_2 l_2$,.... $i_8 l_8$, longueurs déterminées comme il sera expliqué pour la *Fig.* 5, proportionnelles aux aires des *voussoirs fictifs* $i_0 d_0 d_1 i_1$, $i_1 d_1 d_2 i_2$.... $i_7 d_7 d_8 i_8$, et dont les produits par la moitié de la corde d'intrados $a = i_0 i_1 = i_1 i_2 = i_2 i_3$...., expriment la mesure même de ces aires. — g_1, g_2, g_3.... g_8 centres de gravité des voussoirs dont il s'agit, déterminés comme il sera expliqué pour la *Fig.* 5. — g_1', g_2', g_3'.... g_8' projections, de ces centres, sur l'horizontale des naissances CE. — x_2, x_3, x_4.... C, projections des points de division i_2, i_3, i_4.... i_8 de l'intrados, sur la verticale Cj, de la clef. — j sommet de l'*extrados véritable* de la voûte, autour duquel est censée se faire la rotation des parties supérieures, dans le mode de rupture ordinaire.

Fig. 2. *Construction des momens partiels et totaux des voussoirs* (8, 9 et 10).

CO longueur égale à 4 fois l'unité de l'échelle — C$'s_1$ verticale quelconque — C$'s_1$, C$'s_2$,.... C$'s_8$ longueurs respectivement égales à $i_1 l_1$, $i_2 l_2$.... $i_8 l_8$ (*Fig.* 1). — $s_1 m_1$, $s_2 m_2$.... $s_8 m_8$ parallèles aux

---

(*) Les chiffres entre parenthèses indiquent, comme dans le texte, les articles auxquels on doit recourir pour les démonstrations ou explications.

droites Og_1', Og_2'.... Og_8' (*Fig.* 1) — $C'm_1$, $C'm_2$.... $C'm_8$ distances dont les produits par 4 fois $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}i_1i_2 = \frac{1}{2}i_2i_3$.... mesurent, à l'échelle, les momens des voussoirs fictifs $i_0d_0d_1i_1$, $i_1d_1d_2i_2$,... $i_7d_7d_8i_8$ (*Fig.* 1), par rapport à la verticale Cj de la clef.

$jM_1 = \frac{1}{2}C'm_1$, $jM_2 = \frac{1}{2}C'm_1 + \frac{1}{2}C'm_2$, $jM_3 = \frac{1}{2}C'm_1 + \frac{1}{2}C'm_2 + \frac{1}{2}C'm_3$...,

longueurs horizontales dont les produits par $4a$ mesurent les momens, par rapport à la verticale de la clef, des aires $i_0d_0d_1i_1$, $i_0d_0d_2i_2$, $i_0d_0d_3i_3$.... (*Fig.* 1), relatives au 1^er^., aux deux 1^ers^., aux trois 1^ers^. voussoirs, à partir de cette verticale.—jK hauteur (14) égale à 4 fois l'échelle. — $K\mu_1$, $K\mu_2$.... $K\mu_8$ lignes parallèles aux droites x_1M_1, x_2M_2.... CM_8. — $j\mu_1$, $j\mu_2$.... $j\mu_8$, distances auxiliaires pour la construction de la *Fig.* 3.

Nota. Les points et les lignes, de cette figure, marqués de lettres accentuées ('), concernent le 2^e^. mode de rupture par rotation (33), et ont été construits par les mêmes procédés que leurs correspondans du 1^er^ mode, en substituant partout les points de division de l'extrados à ceux de l'intrados, et l'horizontale, en i_0, à celle de j.

Fig. 3. *Recherche de la poussée maximum et du joint de rupture* (13 à 17).

jS_1, S_1S_2.... S_7S_8 distances verticales respectivement égale à la moitié de celles $C's_1$, $C's_2$.... $C's_8$ (*Fig.* 2), ou i_1l_1, i_2l_2.... i_8l_8 (*Fig.* 1) — jS_1, jS_2, jS_3.... abscisses qui, multipliées par $a = i_1i_2$, mesurent, à l'échelle, les aires du 1^er^., des deux 1^ers^., des trois 1^ers^ voussoirs fictifs à partir du sommet de la demi-voûte. — $j\sigma_1$, $j\sigma_2$, $j\sigma_3$.... prolongemens des lignes jx_1, jx_2, jx_3.... (*Fig.* 1), lesquels rencontrentles ordonnées horizontales des points S_1, S_2, S_3...., de mêmes n^os^, aux points de la courbe auxiliaire σ_1, σ_2, σ_3,... — $\sigma_1\phi_1$, $\sigma_2\phi_2$, $\sigma_3\phi_3$.... distances respectivement égales aux longueurs $j\mu_1$, $j\mu_2$, $j\mu_3$,... prises sur l'horizontale du sommet j de l'extrados — $\phi_1\phi_2\phi_3$.... courbe dont l'ordonnée maximum, multipliée par la corde constante $a = i_1i_2$, représente la poussée au sommet de la voûte dans le 1^er^ mode de rupture. — mn tangente verticale limite de cette courbe. — ϕ point de contact de cette tangente — ϕS ordonnée maximum ou de *poussée* — σ intersection de $S\phi$ prolongée et de la courbe auxiliaire $\sigma_3\sigma_4\sigma_5$.... — σj droite dont le prolongement ji (*Fig.* 1) détermine, sur la corde i_4i_5, le point i appartenant au joint de rupture correspondant à $S\phi$ (16).

Nota. Les lettres accentuées se rapportent au 2^e^ mode de rup-

ture (33), et la courbe $\varphi^c{}_1 \varphi^c{}_2 \varphi^c{}_3 \ldots$. à la recherche (50) de la poussée qui, dans le 1er, a lieu en tenant compte de la cohésion sur les plans de joints (voy. plus loin, *Fig.* 12).

Fig. 5 et 6. *Détermination de l'aire et du centre de gravité des voussoirs.*

Fig. 5. *Voussoirs à profil quadrilatère, ou sans surcharge*, $i_4 i_5 d_5 d_4$ (4). — $i_4 d_5$, $i_5 d_4$ diagonales qui se coupent au point o. — $d_4 l_5$ parallèle à $i_4 d_5$. — $i_5 l_5$ longueur telle que son produit par la moitié de la corde $a = i_4 i_5$, mesure sensiblement l'aire du quadrilatère mixtiligne $i_4 d_4 d_5 i_5$, quand cette corde s'écarte très-peu de l'arc correspondant, et qui, pour plus d'exactitude, peut être remplacée par sa projection sur une perpendiculaire à cette même corde. — $md_4 = oi_5$, n milieu de $d_5 i_4$. — g_5 centre de gravité du quadrilatère, situé au $\frac{1}{3}$ de nm à compter de n, et qu'on obtient également en prenant $d_5 m' = oi_4$, n' milieu de $i_5 d_4$, et $n' g_5 = \frac{1}{3} n' m'$.

Nota. Les autres points ou lignes de la figure, se rapportent (7) au cas où les voussoirs fictifs sont censés infiniment petits, et où l'on emploie la méthode des quadratures (11 et 12) pour déterminer leurs aires et leurs momens.

Fig. 6. *Voussoirs avec surcharge ou chape* (5 et 6). — $i_4 i_5$ intrados ; $e_4 e_5$ extrados. — $e_4 d_4 d_5 e_5$ surcharge supposée limitée aux lignes verticales $e_4 d_4$, $e_5 d_5$, et dont les hauteurs, mesurées sur ces lignes, sont censées réduites, dans le rapport de la densité de la substance qui compose la surcharge, à celle des maçonneries. — $d_4 k'$ parallèle à $e_4 d_5$. — $i_4 k$ parallèle à $e_4 i_5$. — l_5', l_5 projections de k' et k sur la perpendiculaire à l'extrémité e_5 de $e_4 e_5$; $l_5 l_5' \times \frac{1}{2} e_4 e_5$ mesure de l'aire totale $i_4 i_5 e_5 d_5 d_4 e_4$.

p et p' centres de gravité des aires $e_4 e_5 i_5 i_4$, $e_4 e_5 d_5 d_4$, déterminés comme il a été expliqué pour la *Fig.* 5. — mm' parallèle à pp', menée par le point e_5, et rencontrant les projetantes kl_5, $k'l_5'$ en m et m'. — s, intersection de mp et $m'p'$, — o intersection de pp' et de se_5; $p' g_5 = op$. — g_5 centre de gravité demandé.

Nota. Les autres points ou lignes de la figure se rapportent (7) au cas où les voussoirs sont supposés infiniment petits, et où l'on emploie la méthode des quadratures (10) pour construire leurs aires et leurs momens.

Fig. 1 (Partie inférieure et latérale). *Détermination de l'épaisseur des piédroits* (23 et suiv.).

dd_8d_7 HSM verticale indéfinie servant de limite extérieure, provisoire, à la demi-voûte et à son piédroit. — $tAdBB's'$ horizontale indéfinie représentant le niveau des fondations de ce dernier. — H intersection de la verticale, en d, avec l'horizontale du sommet j de l'extrados de la clef. — $dS = jS_8$ (*Fig.* 3 et 4); $dS' = \frac{1}{3}dS$; $dM = 2jM_8$ (*Fig.* 2 et 3). — $da = a$, corde commune aux arcs d'intrados i_0i_1, i_1i_2,...; $da' = 4a$; dn = l'unité de l'échelle. — $d\varphi = \frac{1}{3}k \times S\varphi$ (*Fig.* 3) = $S\varphi$ ordonnée maximum de la courbe $\varphi_3\varphi_4\varphi_5$... de poussée, attendu que le nombre k, qui représente le coefficient de stabilité, est pris ici égal à 2. — db abscisse du point de contact u de la tangente menée, du point a', au cercle décrit de d comme centre avec dB pour rayon. — s, h, m, s', b' intersections respectives de l'horizontale indéfinie dB' avec les parallèles Ss à d_7a, Hh à $d_7\varphi$, Mm à d_7n, S's' à d_7B', d_8b' à d_7b. — L'intersection de l'horizontale CE des naissances avec la verticale en s; Iι parallèle à d_7B. — dt distance égale à $dh + dm - ds' - db'$. — ν intersection de la verticale en d, avec le cercle décrit sur $a't$ comme diamètre. — lA = $l\nu$; BA épaisseur cherchée du piédroit.

Nota. Dans le cas où la hauteur dd_7 sera fort petite, on pourra (24, *note*) la doubler, la tripler pourvu qu'on double, qu'on triple en même temps, les distances da, dd_8 et da' dans les constructions où elles entrent, etc.

Pareillement si $dh + dm - ds' - db'$ est négatif, c'est-à-dire si $ds' + db'$ surpasse $dh + dm$, on devra porter la différence dt, de l'autre côté de d, et remplacer $d\nu$ par la tangente, issue de d, au cercle qui a ta' pour diamètre; enfin remplacer pareillement $l\nu$ par la tangente au cercle décrit, de d, avec la 1re. tangente pour rayon.

Résultats relatifs au cas particulier de l'épure.

En observant que l'ordonnée maximum Sφ de la courbe $\varphi_3\varphi_4\varphi_5$... (*Fig.* 3), doit être multipliée par la corde constante $a = i_0i_1$, i_1i_2, etc., et qu'on a Sφ = 38mill., ou $\frac{18}{5}$ = 4,75, et a = 6mill.,4, ou 0m,8, d'après l'échelle, on trouvera :

pour la poussée, en volume de maçonnerie, . . . 3mc,80,
pour l'angle de rupture. . . . . 54° 30',
pour l'épaisseur AB = 23mill.,8, des piédroits, ... 2m, 98.

Ces nombres, bien que déduits directement d'une épure à l'échelle

très-petite de 8^{mill}. pour 1^{m}, s'écartent fort peu de ceux que donne le calcul appliqué à la voûte du magasin de Vauban.

SOLUTION DES QUESTIONS RELATIVES AUX AUTRES MODES DE RUPTURE DES VOÛTES ET A LA STABILITÉ QUI S'Y RAPPORTE. (*Fig.* 3, 4, 10 et 11.)

Fig. 3. ***Stabilité dans le premier mode de rupture par rotation*** (30 et suiv.).

$S_8\pi_8$ ordonnée limitée au prolongement de jd_8 (*Fig.* 1). — $S_8\pi_8$ ordonnée égale à la précédente diminuée de $i_0\mu_8'$ (*Fig.* 2), et qui, multipliée par a, donne la résistance horizontale que la demi-voûte oppose, en j, à l'action de la poussée représentée par l'ordonnée $S\varphi$, et tendant à renverser cette demi-voûte autour de l'arête d_8, prise ici (30, *note*) pour charnière de rotation.

Pour la stabilité sur le joint de naissance, on doit avoir $S_8\pi_8 > S\varphi_8$ et le moment qui mesure (32) le degré de cette stabilité, a pour valeur $a(S_8\pi_8 - S\varphi)Cj$ (*Fig.* 1 et 3).

Fig. 3 et 10. ***Poussée et stabilité dans le 2^{e}. mode de rupture par rotation*** (33 et suiv.).

i_0S_4', i_0S_5'....i_0S_8' abscisses respectivement égales à celles jS_4, jS_5... jS_8 relatives au 1er. mode. — $\sigma_5'\sigma_6'\sigma_7'$... courbe auxiliaire dont les points sont à l'intersection des horizontales $S_5'\sigma_5'$, $S_6'\sigma_6'$,.... et du prolongement des droites i_0d_5, i_0d_6,... (*Fig.* 1). — $\sigma_5'\varphi'_5'$, $\sigma_6'\varphi'_6$,.... distances respectivement égales aux longueurs $i_0\mu_5'$, $i_0\mu'_6$,... prises (*Fig.* 2 et 3) sur l'horizontale du sommet de l'intrados. — $\varphi_5'\varphi_6'\varphi_7'$.... courbe dont l'ordonnée minimum $S'\varphi'$, multipliée par a, donne la *résistance* horizontale que la partie supérieure de la voûte oppose à son renversement, ainsi que la position du joint de rupture relatif à ce mouvement. — $S_8'\pi_8'$ ordonnée limitée au prolongement de i_0i_8 (*Fig.* 1). — $S_8'\pi_8'$ ordonnée égale à la précédente diminuée de $j\mu_8$ (*Fig.* 2), et qui, multipliée par a, donne la *poussée effective* de la demi-voûte à l'instant de la rupture; c'est-à-dire l'effort horizontal en i_0, avec lequel elle tend à se précipiter, en dedans, en tournant sur l'arête i_8, des naissances

Pour la stabilité sur la naissance, on doit avoir $S'_8\pi'_8 < S'\varphi'$, ce qui suppose d'ailleurs la voûte limitée à la verticale d_7d_8 (*Fig.* 1). — $a(S'\varphi' - S_8'\pi_8') \times Ci_0$, moment qui mesure (36) le degré ou surcroît de cette stabilité.

Observations générales.

Selon qu'on aura $(S'\varphi'-S_8'\pi_8')\times Cj_0$ plus grand ou plus petit que $(S_8\pi_8-S\varphi)\times Cj$, la demi-voûte tendra à se rompre suivant le 1^er^. ou le 2^e^. mode (36).

On vérifiera, de la même manière, la stabilité de la demi-voûte sur sa naissance, en la supposant limitée à toute autre ligne que la verticale d_7d_8 (*Fig.* 1) : il ne s'agira que de substituer, à l'aire et au moment du dernier voussoir $i_9i_8d_8d_9$, l'aire et le moment du voussoir qui le remplace et dont la maçonnerie doit être supposée parfaitement liée avec celle de la voûte.

Enfin, si on voulait vérifier directement la stabilité par rapport à la base des piédroits, il suffirait de considérer la voûte comme prolongée jusqu'à cette base, et de continuer, en conséquence, la division de l'intrados et les constructions qui s'y rapportent; chose très-facile.

Fig. 1 et 4. *Partie relative au 1^er^. mode de rupture par glissement* (37 et suiv.).

ji_1', ji_2', ji_3'... parallèles aux lignes de joints fictifs de la voûte. — jN, droite formant avec l'horizontale jH, un angle égal à celui du frottement, et qui a ici été construite en prenant jQ=100^mill.^, et la verticale QN=58^mill.^—js_1, js_2.... abscisses respectivement égales à jS_1, jS_2... prises sur la verticale du sommet j, de la voûte.— $s_1\downarrow_1$, $s_2\downarrow_2$..., ordonnées perpendiculaires à jN et limitées aux droites ji_1', ji_2'...., de mêmes n^os^.—$\downarrow_1\downarrow_2\downarrow_3$... courbe dont l'ordonnée maximum $s\downarrow$, multipliée par a, exprime la valeur de la poussée relative au glissement, du dehors au dedans, des parties supérieures de la voûte. — i_rd_r (*Fig.* 1) joint de rupture parallèle à $j\downarrow$. — p_r (*ibid.*) point d'application de cette poussée, obtenu par le procédé du n° 39.

La rupture suivant le mode actuel, ne sera possible qu'autant que le moment de la poussée $a\times S\downarrow$, par rapport à l'arête extérieure de la base de la demi-voûte ou du piédroit, surpasserait le moment correspondant des poussées relatives aux deux précédens modes de rupture.

Fig. 1 et 11. *Partie relative au second mode de rupture par glissement* (42 et suiv.).

jN' (*Fig.* 1) droite symétrique à la précédente jN (*Fig.* 4), par rapport à l'horizontale jQ.—s_8', s_7', s_6'... points, de cette droite,

symétriques à ceux s_8, s_7, s_6... de la *Fig.* 4. — $s_8'\psi_8'$, $s_7'\psi_7'$... ordonnées ou perpendiculaires à la droite $j\mathrm{N}'$, rencontrant en ψ_8', ψ_7'... les droites ji_8', ji_7'... de la *Fig.* 4, prolongées convenablement. — $s_8'\psi_8'$ plus petite ordonnée de la courbe $\psi_8'\psi_7'\psi_6'$..., (*Fig.* 11), qui, multipliée par a, donne la résistance horizontale et absolue opposée par la demi-voûte, à son glissement, du dedans au dehors, le long du joint de rupture i_8d_8, presque toujours confondu avec celui de la naissance.

Pour la stabilité, l'intensité de cette résistance, doit surpasser (46) celles des poussées horizontales relatives aux trois précédens modes de rupture, etc.

MANIÈRE D'AVOIR ÉGARD A LA COHÉSION DES MORTIERS SUR LES PLANS DE JOINTS (*Fig.* 12).

Partie relative à la rupture par rotation (50).

C$j'e_1'$ verticale indéfinie rencontrant en j', x_0 et C' les horizontales respectives du sommet de l'extrados, du sommet de l'intrados et des naissances de la demi-voûte. —x_1, x_2, x_3... projections horizontales des points de division i_1, i_2, i_3... de l'intrados, (*Fig.* 1). —x_0e_1, x_0e_2, x_0e_3,.... distances horizontales égales aux lignes de joints i_1d_1, i_2d_2, i_3d_3,... (*Ibid.*). —$j'd_1'$, $j'd_2'$, $j'd_3'$... longueurs respectivement égales à $j'e_1$, $j'e_2$, $j'e_3$... — d_1s_1, d_2s_2, d_3s_3..... perpendiculaires aux extrémités respectives des droites x_1d_1, x_2d_2, x_3d_3... rencontrant la verticale de j' en s_1, s_2, s_3... —$j'n$ distance égale à la corde constante $a=i_7i_8$ (*Fig.* 1). —$j'\gamma$ longueur horizontale égale ici à l'unité de l'échelle, ou, plus généralement, à un nombre d'unités marqué par le rapport de la force de cohésion des mortiers sur le mètre carré de joint (ici supposée de 6000 k.), à 3 fois le poids du mètre cube de maçonnerie (supposé de 2000 k.) —$s_1\delta_1$, $s_2\delta_2$, $s_3\delta_3$... parallèles à $n\gamma$, rencontrant $j'\gamma$, prolongé, en δ_1, δ_2, δ_3,...—$j'\delta_1$, $j'\delta_2$, $j'\delta_3$... longueurs à retrancher des ordonnées de la courbe $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$.... (*Fig.* 3), qui portent les mêmes indices ou n^os., afin d'obtenir la courbe $\varphi_1{}^c\varphi_2{}^c\varphi_3{}^c$... servant à déterminer la poussée relative à la nouvelle hypothèse et au mode de rupture ordinaire.

Nota. Pour le 2^e. mode de rupture par rotation (*Fig.* 10), on devrait opérer absolument de la même manière, en échangeant entre elles, les arêtes d'intrados et d'extrados des joints, ainsi que tout ce qui s'y rapporte.

Partie relative à la rupture par glissement (51).

$j'e_1'$, $j'e_2'$, $j'e_3'$.... longueurs verticales doubles de celles x_0e_1, x_0e_2, x_0e_3.... des lignes de joints. — $j'n' = 2$ fois $j'n$; $j'\gamma' = 3$ fois $j'\gamma$. — $e_1'\delta_1'$, $e_2'\delta_2'$, $e'_3\delta_3'$,... parallèles à $n'\gamma'$ rencontrant l'horizontale $j'\gamma'$, prolongée, en δ_1', δ_2', δ'_3...., $-\lambda_1$, λ_2, λ_3...., rencontres des perpendiculaires $\delta_1'\lambda_1$, $\delta_2'\lambda_2$, $\delta_3'\lambda_3$.... à l'axe jN (*Fig.* 4), avec les droites $j'\lambda_4$, $j'\lambda_2$, $j'\lambda_3$.... respectivement perpendiculaires aux lignes de joints Ci_1, Ci_2, Ci_3.... (*Fig.* 1), ou à leurs parallèles ji_1', ji_2', ji_3'.... (*Fig.* 4). — $j_1'\lambda_1$, $j_2'\lambda_2$, $j_3'\lambda_3$,... longueurs à retrancher des ordonnées $\downarrow_1 s_1$, $\downarrow_2 s_2$, $\downarrow_3 s_3$,... (*Fig.* 4), pour obtenir la courbe de poussée relative à la nouvelle hypothèse; courbe qui n'est point rapportée sur la figure, parce que tous ses points étant situés au-dessous de l'axe jN, la poussée se trouve entièrement détruite ou remplacée même par une résistance qui s'oppose à la descente des parties supérieures de la voûte.

Nota. Les points λ_1', λ_2', λ_3'..... (*Fig.* 12), rencontres des lignes $j'\lambda_1$, $j'\lambda_2$, $j'\lambda_3$.... avec les perpendiculaires $\delta_1'\lambda_1'$, $\delta_2'\lambda_2'$, $\delta_3'\lambda_3'$.... à l'axe jN' (*Fig.* 1), appartiennent au cas où le glissement est censé s'opérer du dedans au dehors; de sorte que les distances $j'\lambda_1'$, $j'\lambda_2'$, $j'\lambda_3'$.... doivent être ajoutées aux ordonnées respectives de la courbe $\downarrow_8'\downarrow_7'\downarrow'_6$.... (*Fig.* 1 et 11) pour obtenir celle qui répond à la nouvelle hypothèse, et dont tous les élémens d'ailleurs excèdent ici les limites de la Pl. III.

SECONDE SOLUTION RELATIVE AU MODE DE RUPTURE ORDINAIRE DES VOÛTES. (*Fig.* 7, 8 et 9.)

Fig. 7. Détermination des aires et des momens des voussoirs, par la méthode des quadratures ou des infiniment petits (n°. 11).

Fig. 8. Méthode pour construire graphiquement, par approximation, la *hauteur moyenne* ou *réduite* $a_5\mu_5$, d'un trapèze mixtiligne $a_4m_4n_5m_5a_5$ (n°. 12).

Fig. 9. Construction directe du joint de rupture i_rd_r, par la courbe auxiliaire $t_2't_3'...t'$ (n°s. 18 et 19).

DE L'EMPLOI DES TROUPES AUX TRAVAUX DES FORTIFICATIONS;

Par M. VILLENEUVE, Capitaine du Génie, Aide-de-camp de M. le Lieutenant-général ROGNIAT.

Le projet d'employer les troupes, en temps de paix, aux travaux d'utilité publique, est presque toujours accueilli favorablement par un grand nombre de personnes. Il paraît, en effet, dès le premier abord, s'appuyer sur plusieurs considérations importantes. Qui n'a pas entendu dire, que le soldat est souvent livré à une oisiveté aussi nuisible pour lui-même, qu'onéreuse pour l'état; que le régime ordinaire des garnisons, au lieu d'en faire un homme robuste, capable de supporter les fatigues de la guerre, tend, au contraire, à l'amollir, et à le rendre impropre, quand il rentre dans la vie civile, à reprendre l'habitude du travail; que quelques mois suffisent, aujourd'hui, pour former le soldat au maniement des armes et aux manœuvres;

qu'il est facile, après cela, de l'entretenir dans un état convenable d'instruction; que son intelligence naturelle doit dispenser de l'assujettir à une répétition monotone des mêmes élémens; et que le travail ne formerait qu'une diversion utile à des minuties puériles et tracassières, auxquelles on est réduit à l'astreindre, afin d'occuper ses instans?

Le travail, dit-on, fortifierait la constitution physique du soldat, et le mettrait en état, dès les premiers jours d'une campagne, d'exécuter les ouvrages nécessaires pour les opérations des armées; la rétribution de ce travail adoucirait les privations que lui impose la modicité de sa solde; ses facultés, en présence des conceptions qui dirigent les grands ateliers, ne pourraient que se développer utilement; enfin, rendu à ses foyers, il trouverait, dans ses dispositions au travail, le moyen d'assurer son existence, tandis que, d'un autre côté, l'habitude de l'ordre, de la déférence pour ses chefs, des égards pour ses inférieurs et ses égaux, fruits de la discipline militaire, le feraient distinguer honorablement.

Et quels inconvéniens, ajoutent les partisans de cette mesure, pourraient balancer de tels avantages? Craindrait-on que, par un reste d'anciens préjugés, le soldat, employé à des travaux, vît s'affaiblir cette considération publique, qui forme le premier mobile du métier des armes? Mais d'abord, ces préjugés ont perdu leur puissance, même au sein des classes jadis privilégiées. Ensuite, l'opinion publique ne réside-t-elle pas dans la masse de la population, pour laquelle précisément le travail forme le principal élément de la considération et du bien-être; et si, chaque année,

la loi appelle, dans les rangs de l'armée, les jeunes hommes, espoir de cette population, comment arriverait-il que ceux-ci perdissent de l'estime de leurs concitoyens, parce qu'ils s'entretiendraient dans leurs premières habitudes, et qu'ils serviraient doublement leur pays, en unissant le mérite d'une utilité productive au mérite des plus glorieux sacrifices?

Supposerait-on que quelques chefs militaires pussent y apporter des entraves? Mais, aujourd'hui, la plupart d'entre eux sortent du rang des soldats, et appartiennent à des familles vouées au travail. Nul doute qu'ils ne fussent portés, par ce respect, naturel chez les hommes, pour la condition paternelle, et par leurs propres souvenirs, à accueillir et féconder ce moyen d'améliorer le sort de ceux dont ils furent les égaux.

La discipline serait-elle compromise, parce qu'un gain modique offrirait au soldat quelques moyens de récréation? Peut-être serait-ce à craindre, si les soldats étaient disséminés, comme travailleurs, au milieu d'ouvriers non militaires; car, dans leur isolement de toute famille, ils seraient moins protégés que ces derniers, contre les dangers des mauvaises liaisons. Mais il n'en saurait être ainsi à l'égard de soldats réunis en détachemens, et qui, bien que délivrés sur l'atelier du joug du silence et de l'immobilité, y resteraient cependant sous les yeux de leurs chefs, et ne pourraient y perdre l'habitude de la subordination. Qu'il est plus vraisemblable, au contraire, que les occasions d'indiscipline seraient moins fréquentes, alors que le soldat cesserait de servir de jouet au désœuvrement, pour ainsi dire, de son caporal, et trouverait, dans le

travail, un remède à l'ennui, à la mauvaise humeur qu'engendrent ordinairement la contrainte et l'oisiveté.

Enfin, et ce motif est généralement présenté comme déterminant, les finances de l'état trouveraient de grands avantages à ce que les troupes fussent employées à des travaux d'utilité publique. Car, le soldat recevant déjà une solde et différentes prestations, il ne serait pas nécessaire de le rétribuer sur le même pied que l'ouvrier ordinaire, qui doit pourvoir, par son travail, aux besoins d'une famille entière. Un faible gain suffirait, à la fois, pour améliorer sa nourriture, lui procurer des vêtemens de travail, et laisser un léger stimulant à son activité. Que ce gain soit fixé, par exemple, à 50 centimes par jour; comme le prix de la journée d'un ouvrier ordinaire est d'environ 1 franc 25 centimes, il y aura une économie de 75 centimes, laquelle, reproduite pour le grand nombre d'hommes qu'il serait possible d'employer, procurerait, sur l'ensemble des travaux, une épargne annuelle de plusieurs millions. De là, quelle facilité pour exécuter les constructions que réclament sur un grand nombre de points, le commerce, l'agriculture, et les moyens de défense du pays!

A ces considérations on ajoute l'autorité des exemples. Sans insister sur l'usage, bien connu, des Romains, à cet égard, on rappelle qu'en France, à plusieurs époques et même de nos jours, les troupes ont été souvent employées à des travaux publics.

Sous Henri IV, les travaux des fortifications, dirigés par Errard de Bar-le-Duc et Claude de Châtillon, étaient exécutés par des soldats. Sully fit entrepren-

dre le canal de Briare par six mille hommes, qui y furent employés depuis 1605 jusqu'en 1610.

Sous Louis XIV, l'usage de faire travailler les troupes était général. A Dunkerque, en 1670, un camp de trente mille hommes fournissait, chaque jour, sur les ateliers, dix mille travailleurs, qui se relevaient de quatre heures en quatre heures, au signal du canon. Trente mille hommes furent aussi rassemblés pour travailler à l'aquéduc de Maintenon, de 1684 à 1688.

Dans le cours du siècle dernier, un grand nombre de règlemens, notamment celui du 17 avril 1744, et l'ordonnance du 1^er^. mars 1768, attestent que l'usage y fut continué d'employer des soldats aux travaux. Des améliorations considérables aux fortifications et au port de Gravelines, furent exécutées, de 1716 à 1740, soit par la garnison ordinaire, soit par des troupes campées, à cet effet, près de la place. Seize bataillons furent employés, en 1765, au canal de la Lys à l'Aa; ils étaient placés à Saint-Omer, à Aire et Saint-Venant; et les travailleurs, au nombre de cent par bataillon, étaient baraqués sur le terrain des travaux, et relevés de trois semaines en trois semaines. Douai, Metz, Thionville, Bitche, Belle-Ile, Dunkerque, Toulon, Brest, Landau, et d'autres places, offrent aussi l'exemple de grands travaux militaires exécutés par les soldats. A Toulon, en 1765, six bataillons fournissaient six cents hommes, par jour, pour la construction du fort Lamalgue, et l'on y fit une observation importante, c'est que la désertion, fort commune dans cette garnison, à cause de la cherté des denrées, cessa

d'être sensible, dès que le soldat put trouver quelque moyen d'aisance, dans la rétribution de son travail ; l'hôpital, auparavant encombré, devint presque désert. Enfin, trois régimens furent employés au canal du Centre, depuis 1783, époque de son entreprise, jusqu'en 1786.

Dans le commencement de ce siècle, des guerres continuelles laissèrent peu d'occasions, il est vrai, d'employer les troupes à des travaux ; mais cela se fit cependant sur quelques points. Ainsi, à partir de 1807, huit mille hommes furent réunis à Alexandrie, pour suppléer à l'insuffisance des ouvriers du pays ; les grenadiers des 16e., 102e., 60e. et 23e. régimens d'infanterie, y formèrent successivement les ateliers du pont-éclusé du Tanaro. A Belle-Ile-en-Mer, en 1803 et 1804, le 16e. léger et le 65e., commis à la garde de cette île, fournissaient en même temps quatre cents travailleurs, dont le zèle et l'activité furent constamment remarquables. Les troupes du camp de Boulogne, en 1803, furent aussi employées à la construction des ouvrages destinés à la défense du port et de la ville ; en 1805 et 1806, les travailleurs, fournis par les troupes de terre et de mer, s'y élevaient à environ deux mille cinq cents. A Corfou, en 1812, la garnison était employée aux travaux de tout genre, que nécessitait la mise de l'île, en état de défense.

Si donc de nombreux exemples et des considérations puissantes semblent annoncer qu'il serait avantageux de faire travailler les troupes, comment se fait-il que, depuis plus de vingt années d'une paix profonde, cet usage n'ait pas été rétabli ? Cependant

il a été le sujet de plusieurs écrits (*). L'heureuse influence du travail sur l'aisance, la santé et les mœurs du soldat, n'a pu être méconnue. Le désir de l'économie dans les dépenses de l'état, et celui des innovations utiles, ont été vivement exprimés par les organes de l'opinion publique. L'exemple des troupes de l'artillerie et du génie, chez lesquelles un travail habituel est loin de nuire au bon esprit qui les anime; l'empressement, chose remarquable, de plusieurs soldats des anciens corps d'élite, pour utiliser, dans des ateliers civils, jusqu'à des heures isolées de loisir; enfin, les avantages qu'on a trouvés, dans quelques places fortes, à employer les compagnies de discipline, n'ont pu échapper à l'attention du gouvernement.

Serait-ce que l'organisation actuelle de l'armée ne pût se prêter facilement à cette mesure, ou bien que les avantages qui y semblent attachés fussent moins importans qu'on n'est disposé à le croire d'abord?

Ces questions essentielles, il faut en convenir, sont

(*) *De l'Emploi des loisirs du soldat français en temps de paix*, par M. Pagézy de Bourdéliac; ouvrage couronné, en 1822, par l'académie de Châlons-sur-Marne.

Essai sur la manière d'utiliser les troupes en temps de paix, par M. de Lambertye. 1824.

Essai sur le moyen d'appliquer le régime militaire à l'entretien des routes, canaux et travaux publics, par M. Heulard de Montigny.

Force et faiblesse militaire de la France; par le colonel Paixhans, 1830.

De l'emploi de l'armée dans les grands travaux civils, par un officier supérieur (*Journal des Sciences militaires*, décembre 1833).

Emploi des troupes aux travaux publics, par M. Saulnier, préfet du Loiret (Journal *le Temps*, 3 décembre 1834).

restées sans examen approfondi. La question d'économie, surtout, n'a été soumise à aucune analyse exacte et complète ; et même, ainsi qu'on le verra plus loin, les exemples cités précédemment l'ont laissée encore indécise. Il peut être utile de fixer les idées à cet égard, et c'est le but qu'on s'est proposé dans cette notice.

On doit remarquer, d'abord, que, parmi les troupes dont l'armée se compose, il est deux armes, la cavalerie et l'artillerie, qui restent en dehors de la question. Dans la première, le pansage du cheval, l'entretien des harnais, les distributions, les exercices, laissent à peine au soldat les heures de repos strictement nécessaires. Dans la seconde, si le soldat fait partie d'une batterie à cheval, il est tenu à plus de soins encore que le cavalier ; s'il est à pied, son instruction, minutieuse et variée, réclame aussi, pour être complète et bien entretenue, à peu près tous ses instans. On sait d'ailleurs que, soit aux salles des écoles régimentaires, soit aux ateliers des arsenaux, les loisirs du soldat d'artillerie sont toujours utilement employés.

Quant aux troupes du génie, qui ne forment qu'une petite fraction de l'armée, et dont l'instruction complète exige aussi beaucoup de temps, il est déjà d'usage de les employer, dans les places fortes, à quelques travaux spéciaux, pour lesquels on ne trouve pas toujours, dans les localités, les ressources nécessaires.

Il ne reste donc à considérer, dans la question générale, que les seules troupes d'infanterie.

Cela posé, voici les questions à examiner :

1°. Les troupes pourraient-elles être employées à

des travaux publics, sans préjudice pour leur instruction militaire?

2°. A quels travaux les troupes pourraient-elles être employées avec avantage?

3°. Quelle économie en résulterait-il dans le prix d'exécution de ces travaux?

4°. Enfin, quelle influence cette mesure pourrait-elle exercer sur l'amélioration du sort du soldat en général?

Les troupes pourraient-elles être employées à des travaux publics, sans préjudice pour leur instruction militaire?

Beaucoup de militaires s'accordent à reconnaître qu'un jeune soldat, incorporé, vers le milieu de l'année, dans un régiment d'infanterie, est ordinairement, dans le courant de la même campagne, formé aux écoles du soldat et de peloton, et mis en état de suivre convenablement l'école de bataillon; qu'en même temps, il se forme aux habitudes et à la discipline militaires; et que, dès la seconde année de service, et les années suivantes, on pourrait se borner, pour entretenir son instruction, à le rappeler aux détails, durant deux mois consécutifs, et à l'exercer, le reste du temps, une fois par semaine.

En admettant ces bases, et supposant que les deux mois, consacrés aux détails soient ceux de mars et d'avril, et que les exercices de chaque semaine aient lieu le samedi, jour en même temps réservé pour les soins de tenue et de propreté, on conçoit que tout soldat, de plus d'un an de service, pourrait, sans préjudice

pour son instruction militaire, être employé à des travaux cinq jours par semaine, à partir du 1er. mai, c'est-à-dire pendant toute la saison favorable à l'exécution des ouvrages.

Voyons donc combien un régiment d'infanterie compte ordinairement de soldats de plus d'un an de service.

Un régiment, sur le pied de paix fixé par l'ordonnance du 27 février 1825, présente l'effectif suivant, déduction faite des officiers :

Sous-officiers.	151	407
Caporaux.	196	
Tambours.	60	
Soldats.		1,356
TOTAL. . .		1,763

La loi de recrutement, de 1832, fixant la durée du service militaire à sept ans, l'effectif des troupes est généralement composé, sauf le peu d'exceptions provenant des rengagemens, de sept classes successives. Mais ces classes sont loin de présenter une égale force numérique. On a reconnu que chacune d'elles s'affaiblit, annuellement, par les décès, les réformes et autres causes, d'environ 7 pour 100 de son effectif; de sorte qu'en les supposant toutes d'une même force originelle, on trouve qu'un régiment d'infanterie, considéré sous le rapport de l'ancienneté de service, présente, à peu près, la composition suivante :

1re.	classe, de moins d'un an de service.	310	
2e.	de 1 à 2 ans de service.	288	1,453
3e.	de 2 à 3 ans. *id.*	268	
4e.	de 3 à 4 ans. *id.*	249	
5e.	de 4 à 5 ans. *id.*	232	
6e.	de 5 à 6 ans. *id.*	216	
7e.	de 6 à 7 ans. *id.*	200	
	TOTAL.	1,763	

On voit, par-là, que, dans un régiment d'infanterie sur le pied de paix fixé par l'ordonnance de 1825, il doit exister environ 1,453 hommes de plus d'un an de service, sur lesquels, déduction faite des sous-officiers, caporaux et tambours, il peut se trouver 1,050 simples soldats; ce qui fait, à peu près, les trois cinquièmes de l'effectif total. Tel serait, par conséquent, le nombre des hommes qu'on pourrait employer à des travaux, plusieurs mois de l'année, sans nuire à leur instruction militaire (*).

Il est d'ailleurs évident que ces hommes ne seraient pas tous disponibles en même temps; car une grande partie d'entre eux serait enlevée par le service ordinaire, par les corvées, les maladies, etc. On peut même remarquer que, dans plusieurs des grandes

(*) Dans une organisation différente de celle de 1825, on arriverait à d'autres résultats. En supposant, par exemple, que l'on réalisât le projet, aujourd'hui en faveur, d'appeler sous les drapeaux la totalité des classes annuelles du recrutement, sauf à ne les assujettir qu'à trois ans de présence, et à les renvoyer ensuite dans leurs foyers, pour y compléter les sept années du service légal, on peut présumer qu'alors l'effectif moyen de l'armée active ne serait guère au-dessous de 286,000 hommes, dont environ

villes, où les troupes d'infanterie tiennent généralement garnison, elles suffisent à peine au service ordinaire, et qu'on est souvent obligé, afin de leur laisser le temps de repos fixé par les règlemens, de recourir aux troupes d'autres armes, qui sont à cet effet, distraites de leur instruction spéciale.

Mais, si l'on admet que, dans les circonstances ordinaires, la moitié ou les deux tiers des soldats de plus d'un an d'ancienneté, réunis à ceux de la première classe, puissent suffire aux besoins du service, il resterait encore plus de 300 hommes par régiment, dont on pourrait disposer, chaque jour, pour les travaux; nombre suffisant, pour qu'en relevant les travailleurs après une certaine période, et les faisant passer alternativement des ateliers au service militaire, et de celui-ci aux ateliers, il fût permis d'en attendre des

---

220,000 pour l'infanterie. Les régimens d'infanterie, supposés maintenus au nombre actuel de 88, présenteraient donc chacun un effectif moyen de 2,500 hommes, dont la composition serait :

1re. classe, supposée rejoindre au 1er. octobre.	920
2e. classe.	880
3e. classe	816
4e. classe, supposée renvoyée le 1er. octobre.	766

Dans ce système, la longueur des opérations préliminaires du recrutement ne devant guère permettre aux jeunes soldats de rejoindre avant le 1er. octobre, c'est-à-dire lorsque l'année est presque écoulée, et que la mauvaise saison nuit aux exercices, l'instruction serait à peine ébauchée dans la première année de service, et il faudrait probablement y consacrer aussi la deuxième année. Il n'y aurait alors que les 3e. et 4e. classes, formant ensemble 1,582 hommes, qui seraient convenablement formées à l'instruction militaire. Déduisant ceux des sous-officiers, caporaux et tambours, qui seraient compris dans ces deux classes, il resterait encore environ 1,200 simples soldats suffisamment instruits pour être employés à des travaux.

résultats importans, et d'espérer entretenir parmi les soldats, l'habitude du travail et ses bienfaisantes conséquences.

A quels travaux publics les troupes pourraient-elles être employées avec avantage?

Vers la fin du siècle dernier, et même de nos jours, on a proposé d'établir les troupes dans des camps, au milieu des vastes étendues de terres incultes, que présente encore le sol de la France; de défricher ces terres et de les cultiver; et cela, dans la pensée que les produits de ce travail, non-seulement suffiraient pour assurer la subsistance du soldat, mais encore pourraient alimenter les marchés voisins, et devenir une source de revenus pour le trésor public (*).

Nous n'examinerons point ces projets philanthropiques, praticables, peut-être, dans d'autres pays, mais qui, dans le nôtre, exigeraient des changemens importans dans l'organisation militaire. Prenons simplement celle-ci telle qu'elle est, et recherchons comment pourraient être utilisés les élémens qu'elle renferme.

Un point de départ essentiel, dans cette question, c'est la connaissance des professions qu'exerçaient les soldats avant leur incorporation dans l'armée. Or, on trouve, à cet égard, dans les comptes annuels du recrutement, publiés par le ministère de la guerre, des renseignemens détaillés, qui constatent que les professions primitives des soldats sont ordinairement

(*) *Le soldat-citoyen*, par M. de Servant, 1780.

réparties de la manière suivante, en prenant pour base l'effectif de 100 hommes :

Laboureurs et manœuvres.	50
Ouvriers en bois.	6
Ouvriers en fer.	3
Ouvriers en pierre.	4
Ouvriers en cuir.	3
Écrivains et commis.	2
Tailleurs d'habits.	1
Mariniers et bateliers.	1
Autres professions diverses.	25
Sans profession et vivant de leur revenu.	5
Total.	100.

Ceci nous fait voir, ainsi qu'il était aisé de le présumer, que les travaux où l'ouvrier-manœuvre joue le rôle principal, sont ceux pour lesquels le grand nombre des soldats ont le plus d'aptitude.

Le recrutement, il est vrai, fournit quelques ouvriers d'art ; mais il n'est pas douteux qu'ils ne présentent que peu de ressources, puisque, étant enlevés à leur profession à l'âge de vingt ans, c'est-à-dire à peine au sortir de l'apprentissage, ils ont encore généralement peu d'adresse et d'habitude des travaux.

De là, l'exclusion des soldats, sauf des exceptions assez rares, de plusieurs genres d'ouvrages, tels que ceux des bâtimens, qui consistent, en grande partie, en maçonneries, charpentes et menuiseries soignées ; tels aussi que les maçonneries en pierre de taille, les travaux hydrauliques, et, en général, tous les ouvrages qui réclament cette précision, cette habileté, cette

connaissance des matériaux, qu'on ne trouve même pas toujours chez les ouvriers civils possédant une longue pratique.

L'emploi des ouvriers militaires sera restreint encore par une condition essentielle, savoir, d'éviter que le soldat soit assujetti ou mêlé à des ouvriers civils; ce qui pourrait évidemment occasioner de fâcheux conflits dans la marche des travaux.

La discipline impose aussi une autre condition, c'est que les soldats restent réunis en ateliers assez considérables, pour que la surveillance de leurs chefs puisse s'exercer facilement. Le nombre de vingt hommes, par exemple, rassemblés sur un même point, doit être considéré à peu près comme un minimum. Autrement, il faudrait, sur les travaux, trop de sous-officiers et de caporaux, dont on a besoin, d'un autre côté, pour l'instruction des recrues, les gardes, le service intérieur, etc.

Enfin, on sait qu'il est nécessaire qu'un ouvrier soit employé plusieurs jours de suite au même travail, afin qu'il puisse se créer une méthode, qui rende ses efforts plus faciles et plus fructueux, et aussi pour épargner les faux frais que multiplient les interruptions et les déplacemens trop fréquens. D'anciens règlemens prescrivaient, dans ce but, que les soldats fourniraient quinze jours de travail, avant d'être relevés. On ne pourrait probablement guères s'écarter de cette période, qui, dans l'hypothèse de cinq jours de travail par semaine, répondrait à trois semaines consécutives.

Parmi les divers travaux d'utilité publique, ceux des fortifications paraissent immédiatement satisfaire

aux conditions précédentes. Ils présentent, en outre, plusieurs avantages particuliers, qui ne se rencontrent point dans les autres travaux, tels que ceux des routes et des canaux. Destinés à la défense du pays, ils appellent naturellement, pendant la paix, la coopération de l'armée, dont aussi, en cas de guerre, ils reçoivent leur principale valeur. Distribués sur les points où déjà la garde des frontières et les établissemens militaires existans, nécessitent le rassemblement des troupes, on ne risquerait point, en y employant le soldat, de compromettre ses habitudes du service militaire, ses moyens d'instruction, les garanties d'ordre et de sûreté auxquelles il est destiné. Ce seraient réellement ses loisirs qui seraient utilisés. Il n'y aurait point de frais extraordinaires pour déplacemens et campemens. On éviterait aussi de priver des villes de leurs garnisons habituelles, et par-là de donner lieu à des réclamations fondées ; car on sait que beaucoup de villes ont concouru à des dépenses de casernement, dans l'assurance d'en être dédommagées par le séjour d'une garnison permanente.

Ces travaux, enfin, sont dirigés par un corps militaire, dont la mission, en temps de guerre, est aussi de diriger les troupes dans les travaux des siéges et des défenses de places, dans la construction des lignes, redoutes et autres ouvrages défensifs. L'analogie de ces deux services est évidente. Que l'ingénieur et le soldat soient habitués, en temps de paix, à concourir au même but, comme il est essentiel qu'ils le soient en temps de guerre, il en résultera, sous plusieurs rapports, des avantages sensibles.

Ainsi donc, les travaux des fortifications paraissent

réunir les circonstances les plus favorables pour l'emploi des troupes, même en temps de paix. Voyons maintenant les avantages qu'on trouverait à cette mesure, sous le rapport de l'économie.

Quelle économie l'emploi des troupes pourrait-il apporter dans la dépense d'exécution des travaux des fortifications ?

Examinons d'abord quelle devrait être la rétribution des soldats employés comme travailleurs.

Une ordonnance royale, du 17 décembre 1680, fixait le prix de la journée du soldat employé aux travaux militaires, à dix sous pendant les sept mois d'avril à octobre, et à neuf sous pendant les cinq autres mois, avec un supplément pour les travaux dans l'eau. Ces prix étaient, à très-peu près, ceux qu'on allouait à des ouvriers ordinaires, ainsi qu'il est aisé d'en juger, en se reportant à la valeur que représentait le *sol*, alors, comme aujourd'hui, vingtième partie de la *livre tournois* (*).

Un règlement du maréchal d'Asfeld, directeur général des fortifications, en date du 11 février 1732, fixa, pour l'excavation des terres à la tâche, différens prix, qui paraissent aussi les mêmes que ceux des ouvriers ordinaires. Plus tard, MM. d'Argenson et de Maurepas, qui se succédèrent à la direction générale des fortifications, au lieu de fixer un prix unique pour tout le royaume, autorisèrent les directeurs à en proposer de variables suivant les localités. Cependant, le

(*) La livre de 1679 avait une valeur équivalente à celle de 1 liv., 86a de la monnaie de 1780. (*Métrologie* de Paucton. — 1780.)

prix uniforme de douze sous par jour fut adopté à Dunkerque, en 1757; à Toulon, en 1764; au canal de la Lys à l'Aa, en 1765; à Brest, en 1765 et 1773; à Landau, en 1774.

Dans les ouvrages à la tâche, la toise cube de terre était payée dix sous, pour deux hommes à la feuille; et, comme on calculait que deux hommes, de force moyenne, pouvaient déblayer trois toises cubes de terre par jour, chacun d'eux devait gagner quinze sous. Le relais, de quinze toises, en plaine, était payé cinq sous par toise cube.

Tous ces prix étaient les mêmes que pour des ouvriers ordinaires. Les ouvriers de métier étaient aussi payés suivant l'usage du pays, et relativement à leur capacité. Ce n'est pas qu'alors même, on n'eût remarqué qu'il devait être permis de traiter différemment le soldat et le journalier. Des notes de MM. les directeurs des fortifications, Frézier, en 1748, et Filley, en 1766, avaient appelé l'attention sur ce point; mais il paraît que des réclamations, ou l'usage établi, laissèrent prévaloir une assimilation complète.

Il est évident que, dans ce système, l'emploi du soldat ne pouvait procurer aucune économie, et qu'il devait, au contraire, augmenter la dépense, à cause des faux-frais résultant de l'inexpérience des travailleurs, et des indemnités dues aux surveillans, chargés spécialement du maintien de la discipline. Le seul avantage qu'on devait y trouver, en outre de l'influence salutaire exercée sur le soldat lui-même, c'était de pouvoir multiplier le nombre des bras, sur les points où les travaux exigeaient une grande activité. Un tel avantage aurait, de nos jours, peu d'importance, du moins

en temps de paix ; car la facilité que trouvent les ouvriers, de tout genre, à émigrer momentanément d'un lieu dans un autre, fait que l'on en manque rarement pour exécuter les travaux des fortifications. C'est plutôt le travail qui manque aux ouvriers.

Mais on remarquera que, dans cette question, les usages du siècle dernier ne doivent pas exclusivement former règle, attendu que, depuis cette époque, l'administration des troupes et les prestations qui leur sont allouées, ont éprouvé des modifications susceptibles d'influer sur la quotité du gain qu'il convient d'accorder aux soldats.

Lors des travaux de Belle-Ile-en-Mer, en 1803 et 1804, une décision du 29 prairial an XI, avait fixé l'indemnité des soldats aux quatre-cinquièmes du prix de la journée des ouvriers du pays. Mais il faut tenir compte des circonstances où se trouvait alors cette île. La croisière des vaisseaux anglais, dans ses parages, la mettait presque en état de blocus, et rendait les travaux très-urgens ; la population n'offrait point de ressources en ouvriers ; la garnison était accablée de service pour la garde des côtes ; les denrées étaient chères. Un taux élevé d'indemnité se trouvait donc indispensable. Le même taux était adopté alors à Port-Louis.

A Alexandrie, en 1806 et 1807, on allouait aux soldats d'infanterie, les trois-cinquièmes du prix de la journée ordinaire. En 1808, et les années suivantes, les soldats du génie, employés aux mêmes travaux, ne reçurent que la proportion des deux-cinquièmes, qui avait été fixée par un règlement du 18 germinal an II. Cette proportion fut prescrite de nouveau par

la circulaire du 25 mai 1810, et à Corfou, en 1812, elle était usitée pour les troupes de toutes armes. Depuis lors, elle a paru concilier, à la fois, les intérêts des soldats et les conditions désirables dans la bonne exécution des travaux; ce qui a déterminé à la consacrer, de nouveau, dans l'instruction sur le service du génie, en date du 31 août 1826, laquelle porte (art. 48): « Lorsque les soldats des régimens du génie, ou autres, » sont employés, par ordre, au compte de l'entrepre- » neur, soit à la journée, soit à la tâche, ils ne reçoi- » vent de lui que les deux-cinquièmes des prix du bor- » dereau. »

On ne sache pas que l'expérience de travaux exécutés, en temps de paix, ait fait reconnaître que cette fixation fût convenable pour les troupes d'infanterie. Peut-être qu'au moment de la leur appliquer, elle serait jugée trop faible; mais, ce qui n'est point douteux, pour quiconque a pu apprécier l'économie qui préside au service des fortifications, c'est que le gain du soldat ne saurait être moindre. Ainsi, dans le besoin de fixer nos idées, adoptons la proportion des deux-cinquièmes des prix ordinaires; mais faisons attention qu'elle ne représente qu'un minimum, et que par conséquent, l'économie qui peut y correspondre, est la plus grande qu'on doive attendre de l'emploi des troupes.

Il convient aussi d'indemniser les sous-officiers et les caporaux, dont la présence est nécessaire sur les ateliers, pour le maintien de la discipline, ainsi que ceux qui sont chargés, à l'occasion des travaux, d'un service particulier, tel que la tenue des contrôles et la distribution des prix de journées. La circulaire ministérielle du 25 mai 1810, allouait à ces grades,

sur la dépense des travaux, une indemnité égale à la moitié de leur solde ordinaire. C'était trop peu, comparativement au soldat, dont la solde est plus que doublée par le produit de son travail. Il paraît plus équitable de régler l'indemnité des sous-officiers et des caporaux, proportionnellement à celle des soldats et à leurs soldes respectives, sauf d'ailleurs les légères gratifications qui leur seraient accordées, dans le cas où ils rendraient des services marqués, comme chefs d'atelier.

Calculés sur cette base, il est aisé de s'assurer que les frais de surveillance militaire s'élèveront, pour chaque atelier de vingt hommes, à peu près à la valeur d'une journée et demie de travail du soldat; de sorte que le prix moyen de cette journée, affecté de ces faux-frais, reviendra aux quarante-trois centièmes du prix de celle des ouvriers ordinaires.

Cela posé, si l'on pouvait ici se borner à un aperçu général, on dirait, ce qui est exact dans plusieurs circonstances: on estime qu'en général, la dépense des travaux de fortification consiste, pour les deux tiers, en achats de matériaux, et, pour un tiers, en payement de main-d'œuvre; par conséquent, une économie de près des trois-cinquièmes sur celle-ci donnera, sur l'ensemble, une réduction d'environ un cinquième. Mais il est nécessaire que nous entrions dans quelques explications détaillées.

Les travaux des fortifications peuvent se diviser en trois classes principales: les *mouvemens de terre*, les *maçonneries ordinaires*, et les *ouvrages de sujétion*. Ces derniers, on l'a déjà dit, exigent des ouvriers habiles, souvent même spéciaux aux localités. Quoique dis-

pendieux, ils emploient généralement peu de main-d'œuvre; les soldats ne pourraient donc y coopérer que dans des cas très-rares, ce qui dispense d'en tenir un compte particulier.

Les maçonneries ordinaires, savoir, celles des fondations et des gros murs de revêtement, seront aussi, presque toujours, au-dessus de la portée des soldats. Ces travaux exigeant, en effet, un certain arrangement de pierres, et beaucoup d'habitude dans la manutention du mortier et de la chaux, ils seront mieux exécutés par des ouvriers spéciaux; et l'on peut présumer qu'en y employant les ouvriers militaires, les pertes qui résulteraient des mal-façons et du mauvais emploi du temps, ainsi que les frais de surveillans multipliés, destinés à guider ces ouvriers, compenseraient, et au delà, l'économie provenant du bas prix de la main-d'œuvre.

Toutefois, pour donner toute leur puissance aux motifs d'économie qui se rattachent à cette question, et répondre en même temps à l'objection, qu'il est essentiel d'offrir aux soldats, ayant un commencement d'apprentissage, le moyen de s'entretenir et de se perfectionner dans leur profession, et que ces travaux comportent encore beaucoup de main-d'œuvre; nous supposerons qu'ils sont, en effet, exécutés par les soldats. Par compensation, il sera permis de négliger les pilotages, les épuisemens et quelques autres travaux, où la main-d'œuvre joue un rôle assez important, mais qui ne sont qu'accidentels dans les fortifications.

Quant aux mouvemens de terre, ils constituent évidemment les travaux les plus favorables à l'emploi de la main-d'œuvre militaire.

Matériaux rendus à pied-d'œuvre.	77 fr., 50 c.
Main-d'œuvre	8, 60
Frais d'outils.	1, 30
Bois d'échafaudages	0, 50
Faux-frais	0, 43
Total.	88, 33

On obtiendrait donc, sur les ouvages de maçonnerie, une économie de 11,67 pour 100.

Maintenant il s'agit de reconnaître quelle serait, sur l'ensemble des travaux des fortifications, l'importance des économies relatives aux terrassemens et aux maçonneries ordinaires.

Dans les parties de ces travaux entièrement neuves, telles que la construction d'une enceinte ou portion d'enceinte, les mouvemens de terre forment à peu près le cinquième, et les maçonneries ordinaires les trois-cinquièmes de la dépense totale. Mais, dans les places actuelles, où l'on se borne, presque partout, à des améliorations ou rectifications d'ouvrages existans, ces proportions sont sensiblement altérées.

L'examen des projets détaillés, présentés pour plusieurs grandes places, telles que Valenciennes, Strasbourg, Belfort, Grenoble et Bayonne, a conduit à ce résultat moyen, savoir, que dans l'ensemble des travaux actuels, les mouvemens de terre figurent pour environ les seize-centièmes, et les maçonneries ordinaires pour les quarante-centièmes de la dépense. Mais, si l'on ne tient pas compte des petits ateliers toujours disséminés, et qu'on range dans cette classe, ceux qui ne peuvent occuper une vingtaine d'ouvriers pendant quinze jours, attendu qu'ils ne se prêtent guères

à l'emploi des soldats, il reste, pour les ateliers où les troupes seraient employées avec avantage, savoir :

En mouvemens de terre, 14 p. 100 de la dépense totale.
En grosses maçonneries, 30 p. 100 *idem*.

Partant de ces bases, et appliquant à ces deux natures d'ouvrages le taux de réduction déterminé ci-dessus, comme pouvant résulter de l'emploi des troupes, on trouve, finalement, que l'économie qu'on pourrait obtenir sur un ensemble de travaux de fortifications, se composerait :

Pour les terrassemens, de 7,61 p. 100 de la dép. totale.
Pour les maçonneries, de 3,50 p. 100 *idem*.

Total. . . 11,11 p. 100

que nous réduirons simplement à 11 pour 100 de la dépense totale.

Il convient maintenant que nous fassions une remarque essentielle. Les détails qui précèdent supposent, en effet, que les soldats employés aux travaux, soient payés directement par les agens de la fortification, ce qui ne pourrait avoir lieu que dans le mode de service *par gérence*. Mais on sait qu'il est presque toujours plus avantageux pour l'état, de faire exécuter les ouvrages à l'*entreprise*, mode constamment recommandé par Vauban, et qui n'a cessé, depuis plus d'un siècle, d'être jugé préférable à la gérence. Ce mode est formellement prescrit par la loi du 10 juillet 1791, et par toutes les instructions relatives au service des fortifications. Celle du 31 août 1826, par exemple, porte : « (Art. 21.) MM. les directeurs doivent mettre

» tous leurs soins à faire établir le mode par entreprise,
» dans les places où il n'existe pas. »

On manque rarement d'entrepreneur, pendant la paix, si ce n'est dans de petites places, où l'on fait peu de travaux; et ce n'est qu'en temps de guerre, ou à l'approche d'une guerre, que, la baisse du crédit public intimidant les entrepreneurs, ou leur faisant rechercher des avantages exorbitans, la gérence devient parfois inévitable. Mais alors, bien que les travaux soient urgens et prennent un grand développement, il n'est plus guères possible d'y employer les troupes, attendu la nécessité de presser leur instruction militaire, et de les porter sur les points où des motifs puissans appellent leur présence.

La gérence n'est donc, pour la question qui nous occupe, qu'un cas exceptionnel de peu d'importance; et c'est le mode par entreprise qu'il faut considérer spécialement.

Il serait difficile d'établir, *à priori*, si ce mode se concilierait parfaitement avec l'emploi des troupes, et notamment, si les rapports des soldats avec l'entrepreneur et ses commis, ne causeraient point d'embarras dans le service. Quelques doutes à cet égard pourraient résulter d'une clause, insérée au devis de la place d'Alexandrie, pour les années 1808, 1809, 1810 et 1811, laquelle était ainsi conçue: « Les militaires commandés pour les mouvemens de terre, ne » seront point sous la police de l'entrepreneur ni de » ses commis. Le toisé des ouvrages qu'ils auront » exécutés sera fait par les officiers du génie, contradictoirement avec les officiers des corps, et le montant » sera acquitté par l'entrepreneur, sur le mandat mis » au bas du toisé, visé par le commandant du génie. »

Mais plusieurs exemples témoignent que les difficultés entre les troupes et les entrepreneurs, sont rarement sérieuses, et qu'elles s'évanouissent devant quelques dispositions réglementaires fort simples, ou l'intervention des chefs militaires.

Admettant donc, que l'emploi du soldat ne soit pas incompatible avec le mode par entreprise, voyons quelle serait alors l'économie à réaliser.

On sait qu'il est d'usage, dans ce mode, d'évaluer d'abord les prix élémentaires des diverses natures d'ouvrages, et de les augmenter d'un dixième, pour former les prix du marché, sauf toutefois le rabais consenti lors de l'adjudication, qui est toujours publique. Les prix des ouvrages de terrassemens et de maçonneries, tels qu'ils sont détaillés plus haut, se trouvent, par conséquent, dans le cas de l'entreprise avec ouvriers ordinaires, composés ainsi qu'il suit :

NATURE des travaux.	ARTICLES de dépense.	PRIX élémentaire, ou dépense utile.	ALLOCATION à l'entrepreneur.	PRIX du marché, ou dépense effective.
		f.	f.	f.
Mouvemens de terre.	Main-d'œuvre.	83 .84	8 .39	92 .23
	Frais d'outils	2 .64	0 .26	2 .90
	Planches et ponts de roulage	0 .24	0 .02	0 .26
	Faux-frais	4 .19	0 .42	4 .61
	Totaux.	90 .91	9 .09	100 .00
		f.	f.	f.
Maçonneries.	Matériaux	70 .40	7 .04	77 .50
	Main-d'œuvre.	18 .18	1 .82	20 .00
	Frais d'outils	0 .91	0 .09	1 .00
	Bois pour échafaudages	0 .45	0 .05	0 .50
	Faux-frais	0 .91	0 .09	1 .00
	Totaux.	90 .91	9 .09	100 .00

L'emploi des troupes devant altérer, comme on l'a vu plus haut, les trois prix élémentaires de la main-d'œuvre, des frais d'outils et des faux-frais; les allocations à l'entrepreneur, qui correspondent à ces trois élémens, et qu'il convient de maintenir au dixième (*), subiront des altérations proportionnelles. Une dépense qui monterait à 100 fr., d'après le détail précédent, sera donc réduite dans les proportions indiquées au tableau ci-après :

NATURE des travaux.	ARTICLES de dépense.	PRIX élémentaire, ou dépense utile.	ALLOCATION à l'entrepreneur.	PRIX du marché ou dépense effective.
		f.	f.	f.
Mouvement de terre.	Main-d'œuvre.	36 .05	3. 61	39 .66
	Frais d'outils.	3 .43	0. 34	3 .77
	Planches et ponts de roulage.	0 .24	0 .02	0 .26
	Faux-frais.	1 .80	0 .18	1 .98
	Totaux.	41 .52	4 .15	45 .67
		f.	f.	f.
Maçonneries.	Matériaux	70 .46	7 .04	77 .50
	Main-d'œuvre.	7 .82	0 .78	8 .60
	Frais d'outils.	1 .18	0 .12	1 .30
	Bois pour échafaudages.	0 .45	0 .05	0 .50
	Faux-frais.	0 .39	0 .04	0 .43
	Totaux.	80 .30	8 .03	88 .33

On déduit de ce détail que, dans le cas d'un entrepreneur employant des soldats, l'économie, relative-

(*) Les *dépenses sèches*, c'est-à-dire celles où l'entrepreneur n'intervient que comme payeur, sont les seules pour lesquelles, dans la rédaction des marchés, le bénéfice alloué soit fixé au-dessous du dixième.

ment à l'entreprise ordinaire, serait de 54,33 pour 100, sur les mouvemens de terre, et de 11,67 pour 100, sur les maçonneries, ce qui produirait, comme dans le cas de la gérence, une réduction de 11 pour 100, sur la totalité des sommes dépensées pour les travaux des fortifications (*).

Mais il ne faut pas perdre de vue que cette quotité doit être considérée comme un maximum, par le double motif que l'évaluation en est basée sur le minimum de gain qui soit alloué au soldat, et sur l'extension la plus grande que puisse recevoir l'emploi des troupes, dans les travaux des fortifications. D'importantes réductions pourraient y être apportées dans la

(*) On demandera peut-être, s'il serait avantageux de recourir à la gérence, dans le cas où le mode par entreprise, se concilierait mal avec l'emploi des soldats. Pour décider cette question, les faux-frais inhérens à la gérence devraient être exactement connus.

On a bien la certitude qu'ils s'élèvent au moins au dixième en sus de la dépense utile, puisque cette quotité, étant abandonnée comme bénéfice de l'entrepriseur, forme ainsi des faux-frais pour l'état, et que néanmoins la préférence acquise à ce dernier mode, est généralement incontestée. Mais le taux moyen des faux-frais, de toute nature, que la gérence entraîne, ne peut guères être fixé. On remarquera seulement que, s'ils s'élevaient à 23,73 pour 100, ce qui ne paraît pas improbable, ils absorberaient, en entier, l'économie résultant de l'emploi des troupes; c'est-à-dire que la gérence, avec soldats payés aux deux-cinquièmes des prix courans, ne serait pas moins chère que l'entreprise ordinaire.

Quant à une combinaison mixte de gérence et d'entreprise, on ne pourrait certainement l'admettre, qu'en restreignant l'emploi des troupes aux seuls mouvemens de terre. Or l'économie qu'on obtiendrait, sur ces travaux, ne formerait qu'environ 7,61 pour 100, de la dépense totale. D'un autre côté, les entrepreneurs, ainsi privés de l'exécution d'une partie des ouvrages, rechercheraient des conditions plus avantageuses sur les autres parties, et il surviendrait probablement, dans les prix d'adjudication, une augmentation à peu près équivalente à l'économie obtenue sur les terrassemens.

pratique. Par exemple, s'il était reconnu que les troupes ne pussent être employées avantageusement qu'aux mouvemens de terre, l'économie, sur l'ensemble des travaux, serait réduite à 7,61 pour 100. Si, en outre, le gain du soldat, étant fixé aux deux-cinquièmes du prix ordinaire, se trouvait insuffisant, et qu'il fallût le porter aux trois-cinquièmes de ce prix (*), l'économie n'excéderait pas 33,51 pour 100, sur la dépense propre des terrassemens, ou 4,69 pour 100, sur la totalité des travaux. Enfin, si le soldat était payé au même prix que l'ouvrier non militaire, il y aurait, à cause des frais d'outils et de surveillance, un surcroît de dépense d'environ 8 pour 100, sur les terrassemens, ce qui en formerait un de 1,12 pour 100, sur l'ensemble des travaux.

Il ne nous reste plus, maintenant, qu'à évaluer l'économie totale que l'emploi des troupes aux travaux des fortifications, pourrait apporter dans les dépenses de l'état.

On sait que ces travaux sont répartis, dans une proportion variable, sur un grand nombre de points du territoire, et que la majeure partie des places ou postes ne donnent lieu qu'à des ouvrages d'entretien de peu d'importance, très-divisés, et dont la dépense ne s'élève, terme moyen, qu'à environ 3,000 francs par place, de sorte qu'ils ne présentent aucune ressource pour l'emploi des troupes.

Ce n'est que dans les places principales, au nombre

(*) Le compte général du département de la guerre pour 1831, porte une dépense de 1,117 fr. 50 c. pour 1,490 journées militaires, employées à tracer une route d'Alger à Sidi-Ferruch; ce qui met le prix de la journée à 75 centimes.

d'environ soixante-cinq, et dans lesquelles on exécute des travaux d'amélioration et quelques constructions nouvelles, que la mesure pourrait paraître avantageuse. Or ces places sont dotées annuellement, par suite des fixations du budget, d'une somme totale qui ne dépasse pas cinq millions (*). Si donc on y utilisait les troupes, l'économie, calculée sur le taux de 11 p. 100, ne dépasserait pas 550,000 fr.

Mais, dans le cas où l'emploi des troupes serait restreint aux terrassemens, et où le gain du soldat devrait être porté aux trois-cinquièmes du prix de la main-d'œuvre ordinaire, l'économie, n'étant plus que de 4,69 pour 100, elle ne pourrait atteindre, au maximum, que le chiffre de 234,500 francs. Si, en outre, le mode par entreprise ne pouvait admettre l'emploi du soldat, et qu'il fallût y substituer la gérence, il est vraisemblable que cette faible économie serait absorbée, à peu de chose près, par les faux-frais inhérens à ce dernier mode.

D'où l'on voit qu'en définitive, l'économie absolue qu'on pourrait se promettre de l'emploi des troupes aux travaux des fortifications, serait presque inaperçue dans l'ensemble du budget de l'état.

Remarquons, toutefois, que les conclusions précédentes ne doivent être appliquées qu'aux travaux ordinaires, pour l'exécution desquels le service des fortifications a trouvé, jusqu'à présent, dans les localités, les ressources nécessaires, et cela, avec une économie généralement non contestée. Mais, étendues à des cir-

(*) Le budget présenté pour 1836, ne porte l'allocation totale du service des fortifications, non compris les places en Afrique, qu'à 4,525,000 francs.

constances extraordinaires, elles pourraient cesser d'être fondées.

Ainsi, par exemple, si les besoins de la défense exigeaient une extrême célérité dans les travaux, sur un point où la population fournit peu d'ouvriers; qu'on n'eût ni le temps, ni le moyen d'en requérir des lieux voisins, ou qu'ils prétendissent à un salaire exagéré, la coopération des troupes pourrait, sans aucun doute, présenter alors des avantages importans.

De même, s'il s'agissait de construire une place neuve, et surtout une place sans escarpe ni contrescarpe en maçonnerie, comme on en voit dans certains sites aquatiques, on obtiendrait des économies plus notables que dans les travaux actuels.

Une place de douze fronts, par exemple, avec escarpe et contrescarpe en terre, dont la dépense serait d'environ 3,600,000 francs, y compris les acquisitions de terrains et quelques ouvrages indispensables en maçonnerie, coûterait un million de moins, si les travaux de terrassemens étaient exécutés par des troupes; ce qui serait une économie considérable, susceptible, peut-être, d'influer sur la résolution même de construire cette place.

Mais ces avantages ne seraient qu'accidentels et temporaires. Ce qu'il importait de reconnaître, c'est l'économie qui peut résulter de l'emploi des troupes érigé en mesure habituelle, normale, dans les circonstances ordinaires. Or cette économie, comme on vient de le voir, serait peu sensible.

Quelle influence l'emploi des troupes aux travaux des fortifications, pourrait-il exercer sur l'amélioration du sort du soldat en général?

Parmi les avantages qui résulteraient de cet emploi, on place souvent au premier rang, celui d'entretenir le soldat dans l'habitude du travail, et de le mettre en état, quand il est rendu à la vie civile, de reprendre facilement les occupations de sa profession primitive.

Les personnes qui ont l'occasion de voir journellement des militaires rentrer dans leurs foyers, après le temps de service voulu par la loi, attacheront peu d'importance à ce motif; bien convaincues, par leurs propres observations, que le service militaire est loin de porter à la mollesse et de rendre impropre au travail. Elles trouveront plus vrai de dire, que l'ancien soldat se fait généralement remarquer par une activité particulière, par son esprit d'ordre et d'exactitude, et par des facultés plus développées que chez ceux de ses pareils, qui n'ont point servi.

Tel est, en effet, le fruit du régime et de la discipline militaire, des circonstances variées dans lesquelles le soldat est placé, et de son intime contact avec un grand nombre d'hommes de mœurs, d'esprit, de caractères différens. Ajoutons-y l'amour du pays, le sentiment de la nationalité, dont il conserve une empreinte d'autant plus vive, qu'ils lui ont imposé les devoirs les plus rigoureux.

Il n'est pas jusqu'aux jeunes ouvriers d'art, eux-mêmes, qui, loin de perdre, dans les rangs de l'armée, le fruit de leur premier apprentissage, n'y trouvent,

au contraire, l'occasion de se perfectionner, soit en travaillant pour les besoins intérieurs des corps, soit en fréquentant divers ateliers, et observant, comparant les procédés en usage dans les contrées qu'ils parcourent successivement.

Sans donc nous occuper du sort du soldat, quand il est rappelé à la vie civile, recherchons simplement quelle serait l'influence de son emploi aux travaux ordinaires des fortifications, pour améliorer sa position actuelle, fortifier sa constitution physique, et le mettre en état de soutenir plus facilement les fatigues de la guerre.

A cet effet, reprenons la supposition favorable, que les ouvrages de terrassemens et de grosses maçonneries soient exécutés par les troupes, et voyons quel est le nombre d'hommes qu'on pourrait y employer chaque année.

Le chiffre de cinq millions, formant à peu près le maximum, en temps ordinaire, des dépenses pour travaux de fortifications, les terrassemens y figurent, d'après la proportion admise de 14 pour 100, pour 700,000 francs, et donnent lieu, dans le mode par entreprise, à une dépense effective, en main-d'œuvre, montant à 586,880 francs Les grosses maçonneries, à raison de 30 p. 100, y figurent aussi pour 1,500,000 francs, et comprennent une dépense, en main-d'œuvre, de 272,700 francs.

Si l'on remarque d'ailleurs que le prix moyen des journées d'ouvriers est à peu près le suivant :

	f.	c.
Manœuvre ordinaire	1,	25
Terrassier et manœuvre choisi. . .	1,	50
Maçon de classe moyenne	2,	15

on en déduit que le nombre des journées employées annuellement aux ouvrages de terrassemens et de maçonneries, peut être fixé, savoir :

Pour les terrassemens, à	429,000.
Pour les maçonneries, à	175,000.
Total	604,000.

Telle est donc la totalité des journées que les travaux des fortifications présenteraient à l'emploi des troupes. Toutefois, elle pourrait s'élever au maximum de 670,000, dans l'hypothèse où l'économie de 11 pour 100, résultant de cet emploi, n'entrerait point en déduction des dépenses de l'état, mais serait allouée au service des fortifications, afin de donner plus d'extension aux travaux.

Admettons, maintenant, que l'infanterie de l'armée, sur le pied de paix, soit composée de 88 régimens de trois bataillons, organisés conformément à l'ordonnance du 27 février 1825. Chaque régiment comprendra 1,356 simples soldats, et l'effectif général en comprendra 119,328, dont environ 92,000, de plus d'un an de service, seraient seuls susceptibles, eu égard aux besoins de l'instruction militaire, d'être employés à des travaux.

La totalité des journées étant donc répartie sur ce dernier nombre, on voit que chaque soldat ne trouverait d'emploi, terme moyen, que pour sept à huit jours de l'année. Et, si les troupes n'étaient admises qu'aux ouvrages de terrassemens, le maximum du nombre des journées se trouvant réduit à 462,000, chaque homme n'obtiendrait d'emploi que pour cinq jours par année.

Considérons une place en particulier, une grande place, dont les fortifications donnent lieu, chaque année, à une dépense de 100 mille francs, et dans laquelle il se trouve habituellement un régiment d'infanterie en garnison. La main-d'œuvre des terrassemens et des grosses maçonneries y consistera dans environ 13,400 journées. Or, le régiment comptant 1,356 simples soldats, dont 1,050 de plus d'un an de service, on voit que ces derniers ne trouveront d'emploi, terme moyen, que pour douze à treize jours, par année. Cet emploi ne serait que de neuf jours, si les terrassemens seuls étaient exécutés par les troupes de la garnison.

Enfin, si l'organisation de l'infanterie n'était pas celle de 1825 : si, par exemple, on réalisait le projet, aujourd'hui en faveur, d'incorporer la totalité des classes annuelles du recrutement, sauf à n'assujettir chacune d'elles qu'à trois ou quatre ans de présence sous les drapeaux ; dans ce cas, l'effectif de chaque régiment d'infanterie serait évidemment plus fort que dans l'organisation de 1825 ; et, si l'on se bornait à employer les hommes déjà formés à l'instruction militaire, on peut prévoir qu'ils ne pourraient être occupés qu'une dizaine de jours par an.

De ces résultats, il paraît ressortir que l'emploi des troupes d'infanterie aux travaux des fortifications, soit que l'on considère l'ensemble de l'arme, ou seulement les garnisons des grandes places en particulier, ne présenterait point d'avantages sensibles pour le soldat en général.

Que serait-ce, en effet, pour chaque homme, que dix à douze jours de travail dans l'année? Sa

constitution physique ne pourrait s'en ressentir, et le produit du travail suffirait, à peine, pour payer les vêtemens qu'il aurait à se procurer, afin de ménager ses effets militaires. Quant à l'amélioration de l'ordinaire, aux deniers de poche, au rétablissement des masses individuelles obérées, on y compterait en vain. Il faudrait, pour que ces élémens du bien-être du soldat fussent sensiblement améliorés, par suite de sa coopération aux travaux des fortifications, que ceux-ci prissent un développement considérable; qu'ils s'élevassent, par exemple, jusqu'à 40 millions. Alors, ils pourraient offrir de l'emploi aux garnisons des grandes places pour deux ou trois mois de l'année; ce qui serait, sans doute, à considérer. Mais il est probable que telle ne sera pas, de long-temps, leur part de dotation au budget, aujourd'hui fixée à quatre ou cinq millions au plus.

Est-ce donc à dire, d'une manière absolue, que l'emploi des troupes aux travaux ne puisse être avantageux pour le soldat lui-même? Non, sans doute. Si l'avantage est illusoire, en considérant les soldats en masse, et c'est le point de vue sous lequel une question, aussi intimement liée à la constitution de l'armée, doit être envisagée, il n'en est pas moins réel et positif, dans quelques cas spéciaux.

C'est en vue de cet avantage, que les règlemens sur le service intérieur des troupes, et notamment l'ordonnance du 2 novembre 1833, autorisent l'usage des travailleurs, soit en ville, soit aux ateliers des corps. Mais alors, le travail n'est plus qu'une mesure exceptionnelle, de convenance individuelle, ou d'obligation temporaire; mesure qui intéresse particulièrement la

police des corps, et dont l'administration générale n'a plus à s'occuper.

Si l'examen précédent eût fait reconnaître que l'emploi des troupes aux travaux des fortifications, pût présenter des avantages notables, sous le rapport de l'économie et d'une amélioration dans le sort du soldat, il serait nécessaire de faire intervenir, dans la question, plusieurs autres considérations.

Il faudrait se demander s'il serait dans l'intérêt général de l'état, d'enlever la majeure partie de la main-d'œuvre de ces travaux aux ouvriers habituels des localités, pour la remettre aux soldats; considérer les perturbations que cette mesure apporterait dans les moyens d'existence de plusieurs milliers de familles; et, dans le cas peu probable où elles paraîtraient sans importance, ménager cependant des transitions nécessaires, afin de n'étendre que successivement l'emploi des troupes à l'ensemble des travaux.

On devrait examiner, aussi, jusqu'à quel point, d'après les lois actuelles du recrutement, l'emploi de l'armée à des travaux d'utilité publique, en temps de paix, pourrait être considéré comme une des obligations du service militaire; et notamment, si l'empressement que mettrait à y assister, le plus grand nombre des soldats, et que rend probable la composition des classes annuelles du recrutement, devrait déterminer à les assujettir tous indistinctement aux travaux; ou bien, s'il conviendrait de n'y appeler que les hommes de bonne volonté, en en dispensant ceux qui trouveraient à employer plus utilement leurs facultés et leurs loisirs.

Ces nouvelles questions mériteraient, de la part de l'administration, une attention sérieuse; mais les résultats qui viennent d'être exposés peuvent dispenser de s'y arrêter, ainsi que le fera voir, plus clairement encore, le résumé suivant.

RÉSUMÉ.

L'emploi des troupes aux grands travaux d'utilité publique, s'annonce, généralement, comme devant offrir des avantages importans, tels que : d'entretenir l'habitude du travail chez le soldat, afin qu'il puisse mieux soutenir les fatigues de la guerre; d'améliorer son bien-être; de procurer une économie notable dans le prix d'exécution des travaux. De nombreux exemples, dont plusieurs encore récens, forment autant de présomptions favorables à cette mesure.

On peut reconnaître, en effet, que les troupes d'infanterie, les seules à considérer dans cette question, sont ordinairement composées, dans la proportion des trois-cinquièmes de leur effectif, de simples soldats ayant plus d'un an de service; et que ces hommes étant déjà formés à l'instruction militaire, il serait possible d'en employer, chaque jour, une grande partie à des travaux, sans préjudice pour cette instruction, ni pour le service ordinaire que les troupes ont à remplir.

On sait aussi que la grande majorité des soldats est composée d'hommes habitués à se servir de leurs bras, et jouissant ainsi de l'aptitude nécessaire pour concourir aux travaux; dans lesquels la main-d'œuvre joue un rôle important.

Les ouvrages de fortifications présentent cette dernière condition; ils se distinguent d'ailleurs, des autres travaux d'utilité publique, par une réunion de circonstances relatives au stationnement et au service ordinaires des troupes, et qui tendent à les faire considérer comme les plus favorables à leur emploi.

Toutefois, parmi ces travaux, ceux de terrassemens, où la main-d'œuvre forme environ les $\frac{92}{100}$ de la dépense, et ceux de grosses maçonneries, où elle en forme les $\frac{20}{100}$, sont les seuls auxquels on puisse espérer d'employer les troupes avec économie. D'après nos calculs, les premiers doivent être considérés comme s'élevant à 14 pour 100, de la dépense totale des fortifications, les autres à 30 pour 100, et par conséquent leur main-d'œuvre réunie aux $\frac{19}{100}$ environ de cette dépense.

En supposant que le prix du travail des soldats soit fixé, comme minimum, aux deux-cinquièmes du prix ordinaire, et tenant compte des frais de surveillance et des modifications que l'emploi des troupes apporterait dans les frais d'outils et les faux-frais, la dépense de main-d'œuvre serait réduite, à peu de chose près, de 19 centièmes à 8 centièmes; l'économie serait donc de 11 pour cent sur la dépense totale.

Mais c'est là un maximum : si le prix de la main-d'œuvre militaire était fixé aux trois-cinquièmes du prix ordinaire, et les troupes employées seulement aux travaux de terrassemens, suppositions autorisées par les explications présentées à cet égard, l'économie se réduirait à 4,69 pour 100; ce qui, appliqué au chiffre actuel du budget des fortifications, montant à cinq millions, au plus, formerait 234,500 francs.

L'économie serait moindre encore, et peut-être

tout-à-fait nulle, si l'emploi des troupes obligeait de substituer, au mode actuel d'exécution des travaux par entreprise, le mode par gérence, avec les faux-frais dont il est toujours accompagné.

Enfin, nous avons vu, d'une part, que la main-d'œuvre des ouvrages de fortifications, susceptibles d'être exécutés par les troupes, ne comprend, au maximum, que 670,000 journées par an; lesquelles, réparties sur la masse des soldats d'infanterie, de plus d'un an de service, ne donneraient, pour chacun, qu'environ sept jours de travail dans l'année; de l'autre, qu'en considérant même une grande place, dont la garnison ne comprenne qu'un seul régiment d'infanterie, les soldats, de plus d'un an de service, n'y trouveraient généralement d'emploi que pour douze ou treize jours, au plus, dans l'année; ce qui serait encore très-insuffisant pour exercer une influence salutaire sur leur constitution physique, ou sur les autres élémens de leur bien-être.

Nous pouvons donc conclure que l'emploi des troupes, en temps de paix, aux travaux ordinaires des fortifications, resterait sans efficacité sensible, tant sous le rapport de l'économie pour le trésor public, qui serait très-faible, sinon douteuse, que sous celui des avantages qu'on pourrait se promettre, pour le soldat lui-même, d'un travail habituel et régulier; que, par conséquent, cette mesure n'aurait pas le degré d'utilité qu'on lui attribue généralement, si ce n'est dans des circonstances extraordinaires, où les travaux seraient urgens, et où l'on manquerait d'ouvriers pour leur imprimer la célérité convenable.

Addition.

ADDITION relative à l'emploi des troupes dans les travaux dépendant du service des Ponts et chaussées.

Après avoir examiné la question de l'emploi des troupes aux ouvrages de fortifications, nous eussions désiré pouvoir étendre cet examen à d'autres travaux d'utilité publique, et notamment aux routes et aux canaux; mais le manque de données suffisantes sur ces travaux, qui dépendent du service des ponts et chaussées, ne nous ayant pas permis de compléter cet examen, nous hasarderons seulement ici quelques remarques générales à ce sujet.

Et d'abord, s'il est vrai que les fortifications présentent, presque toujours, les circonstances les plus favorables à l'emploi des troupes, sous le double rapport de la nature des travaux et de leur situation sur les points où se trouvent réunis la plupart des établissemens militaires, et que cependant cet emploi n'y puisse donner lieu qu'à une économie presque insensible, il est vraisemblable que, pour les travaux de routes et de canaux, on ne pourrait pas obtenir des résultats plus satisfaisans.

En effet, en retirant les troupes des places de garnisons permanentes, il faudrait les faire camper ou baraquer dans les campagnes; ce qui entraînerait d'autant plus de frais, que les travaux à exécuter se trouvant presque toujours répartis, par petites masses, sur de fort grandes longueurs, les troupes auraient à se déplacer assez fréquemment. De plus, leur réunion, loin des marchés ordinaires, ferait ren-

chérir, pour elles, le prix des denrées, et il deviendrait probablement nécessaire d'élever le taux de leur gain, et même d'indemniser les hommes que diverses circonstances empêcheraient de prendre part aux travaux.

C'est par ce dernier motif, sans doute, qu'un règlement tout récent (d'août 1834), approuvé, de concert, par les Ministres de la guerre et de l'intérieur, sur l'emploi des troupes aux travaux dépendans du service des ponts et chaussées, a arrêté que le prix des ouvrages serait fixé d'après les mêmes bases que pour les ouvriers civils, et que le dixième ordinairement alloué à l'entrepreneur, serait employé à payer des indemnités aux officiers et sous-officiers.

Il est évident que, dans le système de ce règlement, l'emploi de l'armée ne serait pas un moyen d'économie, et qu'il occasionerait, au contraire, un excédant de dépense, pour le trésor public, provenant des frais de marche et de campement des troupes.

D'un autre côté, il serait à craindre que l'isolement de ces troupes, au milieu des campagnes, ne nuisît à leur instruction militaire; car elles y seraient privées des moyens d'émulation que présentent les garnisons permanentes, dans le contact réciproque des corps de toutes armes, et dans la surveillance immédiate de chefs supérieurs.

On peut donc présumer que la mesure dont il s'agit n'offrirait des avantages réels, que dans le cas où, ayant à exécuter rapidement des travaux considérables sur un point déterminé, on ne pourrait y réunir le nombre d'ouvriers nécessaires, sans que ceux-ci prétendissent à un salaire exagéré; circonstance qui,

peut-être, se présente quelquefois encore, mais que tendent, chaque jour, à rendre plus rare la densité croissante de la population, la facilité et la sécurité que trouvent aujourd'hui les ouvriers, de toutes professions, à se transporter, d'un lieu dans un autre, pour y chercher du travail, et enfin l'exactitude et la régularité avec lesquelles s'effectuent les paiemens, dans les diverses branches des services publics.

Il ne serait probablement pas impossible de fixer entièrement ses idées à cet égard, à l'aide de renseignemens statistiques convenables, sur l'exécution des routes et des canaux récemment ouverts, ou qui sont encore en construction dans quelques parties de la France. Ainsi, par exemple, si l'on connaissait le nombre et l'origine des ouvriers employés, leur salaire effectif comparé au salaire en usage avant l'entreprise des travaux, la quotité des différentes natures d'ouvrages et de dépenses que ceux-ci ont occasionés, l'évaluation distincte de ceux auxquels les troupes seraient spécialement propres, et l'importance de la part qu'elles y prendraient; on pourrait, en déduire des conséquences utiles, sur les avantages que trouveraient le trésor public et les soldats eux-mêmes, dans la coopération de l'armée à l'ensemble des travaux, que peuvent réclamer les besoins généraux du pays.

Mais l'absence de telles données ne nous permet pas d'exprimer, à ce sujet, une opinion arrêtée. Nous devons toutefois avertir que les œuvres de M. Gauthey, inspecteur général des ponts et chaussées, publiées par M. Navier, en 1816, font mention d'un exemple qui ne serait pas favorable à la mesure en question.

Cet exemple est celui du canal du Centre, qui fut commencé en 1783, et auquel on employa des troupes, afin d'accélérer les travaux. Trois régimens y furent occupés, l'un un an, l'autre deux, et le troisième trois ans consécutifs. Des dispositions, dont l'ouvrage précité rapporte le détail (tome 3), furent prises pour en assurer la bonne gestion. Cependant *les faux frais*, y est-il dit, *auxquels l'emploi des troupes donna lieu, firent monter la dépense des travaux qu'elles exécutèrent, environ au double de ce qu'ils auraient coûté par des terrassiers ordinaires.*

M. Gauthey fait remarquer, en outre, que la totalité des déblais exécutés par les troupes, n'a formé que la dixième partie des ouvrages, de même nature, compris dans la construction du canal; et, comme on ne manqua point d'ouvriers pour les neuf autres dixièmes, on doit présumer, ainsi que l'avait pensé ce savant ingénieur, en supputant le temps nécessaire à l'achèvement des constructions, qu'il n'eût pas été indispensable de recourir à l'emploi des troupes.

MÉMOIRE

SUR

L'EMPLOI DU SABLE

DANS

LES FONDATIONS EN MAUVAIS TERRAIN;

Par M. NIEL, Capitaine du Génie.

Les essais entrepris à Bayonne, sur les fondations en sable, et dont M. le capitaine Moreau a rendu compte dans une *Notice* insérée au 11^e^. N^o^. du *Mémorial*, ont été continués, en 1831, sur des terrains plus mauvais encore, et plus propres par conséquent à faire juger la manière dont le sable se comporte lorsqu'il est chargé d'un poids considérable, et que les parois qui le contiennent viennent à céder. Nous nous proposons de donner ici la description de ces nouveaux essais et des expériences qui les ont accompagnés.

On a construit, sous la traverse du *bastion du Sault*, deux passages voûtés qui ont été fondés sur sable.

L'un d'eux (*Fig.* 1, 2 et 3, *Pl.* IV), attenant à la vieille tour du *Sault*, couvre l'entrée du magasin à

poudre qu'elle renferme. Sa construction présentait des difficultés en ce que la voûte devait s'appuyer, d'un côté, sur la tour, et, de l'autre, reposer sur un piédroit auquel il aurait fallu donner une hauteur de $6^m,00$ pour le fonder sur l'ancien sol du bastion. C'est ce piédroit qu'on a établi sur un massif de sable de $1^m,40$ de hauteur, sur $2^m,20$ de largeur, et dont la base, située à $2^m,00$ au-dessus du sol primitif, reposait sur un terrain nouvellement rapporté et composé, en outre, de terres vaseuses.

Pendant la construction, les assises de libages qui reposaient sur le sable, s'enfoncèrent de $0^m,19$ au point *a*, de $0^m,29$ au point *b*, de $0^m,27$ au point *c*, et de $0^m,33$ au point *d*. Le tassement ayant continué après la construction, le piédroit, en s'abaissant, a tourné autour de son arête extérieure; la voûte s'est ouverte à l'extrados, et l'on a été obligé de la recintrer pour empêcher sa chute. Aujourd'hui le tassement total est de $0^m,55$, au point *b*, et de $0^m,51$ au point *c*.

Le terre-plein du bastion étant remblayé avec des terres prises dans l'eau, il était indubitable qu'elles éprouveraient un tassement considérable: la voûte, dont un des piédroits était fixe, devait nécessairement s'ouvrir à l'extrados comme elle l'a fait, et sa chute ne prouve rien contre l'emploi du sable.

La différence de tassement qu'on remarque entre le point *a* et le point *d*, paraît devoir être attribuée à l'inclinaison qu'avait le sol primitif du bastion. Celle entre le point *b* et le point *c*, vient, sans doute, de la différence de hauteur de la maçonnerie qui s'élève en allant du point *c* vers le point *b*. . . . .

Dans le second passage voûté (*Fig.* 4, 5, 6 et 7)

et le magasin de la batterie attenante, le massif de sable a été établi, comme dans le premier, sur un terrain nouvellement remblayé; mais ici aucune partie de la maçonnerie ne se trouvait retenue par un point fixe. On a donné au massif de sable, une hauteur de 1^{m},40, et on l'a fait régner sous toute l'épaisseur du passage voûté, comme l'indique la *Fig. 7*.

La pente qu'avait l'ancien terre-plein du bastion au-dessous de cette construction, et qui se trouve indiquée dans les trois coupes suivant IJ, GH et EF, devait naturellement produire, dans le sable, des tassemens très-inégaux. Il y a plus d'un an que les maçonneries sont terminées, et voici les tassemens éprouvés par les libages qui reposent immédiatement sur le sable : l'enfoncement a été de 0^{m},20 au point *a*, de 0^{m},23 au point *b*, de 0^{m},27 au point *c* et de 0^{m},20 au point *d*. Malgré ce tassement considérable, les seuls mouvemens qu'on aperçoive dans la maçonnerie, se réduisent aux suivans.

1°. Le couronnement incliné, en pierres de taille, des deux murs en aile, s'est détaché, dans sa partie inférieure, de la maçonnerie en moellons sur laquelle il reposait; ce mouvement va en diminuant du bas vers le haut, et disparaît dans le point où le couronnement se réunit à la tête de voûte.

2°. La voûte du passage s'est ouverte, à l'extrados, dans la partie correspondante à la clef; mais la lézarde qui règne dans toute la longueur de cette voûte, n'a pas deux millim. dans sa plus grande largeur.

Ces deux mouvemens paraissent d'ailleurs trop faibles pour exercer une influence fâcheuse sur la durée du passage voûté.

La pente de l'ancien sol sur lequel on a appuyé les nouvaux remblais, et le tassement considérable qu'a éprouvé cette construction sans qu'il en soit résulté de grandes ruptures dans la maçonnerie, semblent prouver ce résultat, très-important à constater, qu'à mesure que le terrain cédait inégalement sous les pressions exercées par le massif de sable, ce dernier reprenait son niveau sous la surface des libages; bien que la différence qui existe entre le tassement des points *a*, *b*, *c* et *d*, prouve que, quand la pression est trop inégalement répartie, la mobilité du sable ne suffit plus pour empêcher complétement les tassemens inégaux.

Cette dernière remarque s'applique aussi à la petite lézarde qui s'est manifestée dans la voûte du passage (*Fig.* 4, 5, 6 et 7); elle aura été produite par la dépression de la partie verticale qui correspond au piédroit extérieur, lequel ne repose que sur un empâtement de $0^{m},30$, tandis que le piédroit intérieur repose sur un empâtement de $0^{m},50$.

Quoiqu'on puisse tirer des conclusions importantes des deux essais que nous venons de rapporter, de nouvelles expériences étaient d'autant plus nécessaires pour étudier l'action du sable sur les parois qui le renferment, que celles qui ont été faites, soit à Genève, soit à Paris, n'avaient pas donné, comme on va le voir, des résultats propres à éclaircir entièrement la question; ces expériences ne sont point encore terminées, mais nous allons en indiquer les principaux résultats, afin qu'on puisse juger s'ils n'autorisent pas à proposer un essai en grand.

Les premières expériences que nous avons faites,

ont eu pour but d'apprécier la pression que le sable exerce sur le fond du vase qui le contient.

Dans cette vue, on a pris (*Fig.* 8) une caisse sans fond, de $0^m,70$ de longueur, sur $0^m,60$ de largeur et $0^m,70$ de hauteur; on l'a mise sur le plateau d'une balance, et on l'a remplie de sable quartzeux, de grosseur moyenne, qui venait d'être retiré de l'Adour, de sorte qu'il était encore humide; on a pesé le tout, on en a déduit le poids de la caisse, et il est resté, pour celui du sable, 468 kilog. Cela fait, on a fixé la caisse au moyen d'arcs-boutans, de manière que le sable seul reposait sur le plateau de la balance, et on a déchargé peu à peu le plateau opposé, qui était maintenu par des poids plus que suffisans pour mettre le sable en équilibre.

A mesure qu'on déchargeait, on s'apercevait que le plateau qui soutenait le sable, baissait peu à peu; enfin, lorsqu'il n'est plus resté que 256 kilog., 50 sur le plateau qui portait les poids, l'autre a été entraîné par le mouvement du sable qui a glissé le long des parois de la caisse.

On a répété cette expérience en chargeant le sable d'un poids de 258 kilog., lequel, ajouté à son propre poids, donnait un total de 726 kilog.: cette fois, le plateau qui soutenait le sable est parti quand l'autre portait un poids de 400 kilog. Enfin, on a chargé le sable d'un poids de 508 kilog., qui, ajouté au sien propre, donnait un total de 976 kilog., et le plateau est parti avec un poids de 500 kilog.

En prenant le rapport du poids du sable et de sa charge avec la pression exercée sur le fond, au moment où l'équilibre a été rompu, on trouve:

$$\frac{468,0}{256,5} = 1,82, \quad \frac{726}{400} = 1,82, \quad \frac{976}{500} = 1,95.$$

La pression supportée par le fond est donc sensiblement proportionnelle aux charges.

La même expérience a été faite en remplaçant le sable par de la terre végétale, et on a trouvé :

$$\frac{395,5}{235,0} = 1,68, \quad \frac{653,5}{320,0} = 2,04, \quad \frac{900,5}{405,0} = 2,21.$$

On voit qu'ici le rapport est bien plus variable ; cela tient à ce que la terre se comprimant à mesure qu'on la charge de poids, l'adhérence et le frottement contre les parois de la caisse, sont modifiés par ces poids : à la suite de la troisième expérience, la terre était devenue beaucoup plus compacte qu'après la première; tandis que, dans le sable, on ne trouvait aucun changement appréciable.

Les résultats obtenus dans ces expériences, et qui prouvent que, quand le fond cède, les pressions qu'il supporte sont encore proportionnelles aux poids dont on charge le sable, sont, en apparence, contraires à ceux des expériences de Genève; mais observons que l'action exercée, par le sable, sur les parois latérales qui le renferment, ne diminue en rien sa pression verticale, qui est égale à son poids; le prisme de plus grande poussée n'en pèse pas moins, parce qu'il tend à éloigner la paroi verticale qui le soutient. Lorsque le fond cède, le frottement prend naissance, et fait que les parois sont pressées *verticalement* de tout le poids dont ce fond se trouve déchargé.

Pour rendre la chose plus sensible, supposons le vase *abcd* (*Fig.* 9), rempli de sable ; soit Q le poids

de ce sable, F la pression horizontale que le prisme de plus grande poussée *abe* exerce sur la paroi *ab*; le frottement étant proportionnel à la pression, et *m* étant son coefficient, sa valeur sera mF : d'un autre côté, si *n* est le coefficient de l'adhérence, la résistance qu'elle oppose au mouvement étant proportionnelle aux surfaces, sa valeur sera nh sur la hauteur $ab=h$. Pour simplifier et nous rapprocher de l'hypothèse des fondations d'un mur, ne considérons que les résistances opposées au mouvement par les parois *ab* et *cd*. Dans l'état de repos, le fond *bc* sera pressé par un poids Q; mais, s'il vient à céder, la pression ne se répartira plus également; le fond ne sera plus pressé que par une force P, telle que

$$P = Q - (2mF + 2nh),$$

et il faudra une force égale à $2mF + 2nh$ pour supporter l'augmentation de poids des parois *ab* et *cd*.

Si ces deux parois viennent à se rapprocher, la force Q décroîtra, comme la quantité de sable contenue, proportionnellement à ce rapprochement, tandis que le terme $2mF + 2nh$ restera constant aussi longtemps que la largeur du vase ne sera pas moindre que $2ae$: au moment où les parois, en se rapprochant, dépasseront la limite $2ae$, le terme $2mF$ commencera à diminuer, mais dans un rapport bien moindre que Q, et le terme $2nh$ restera toujours constant.

On conçoit ainsi l'influence que le rapprochement des parois exerce sur la pression d'un fond mobile, et on n'est plus surpris que, dans un tube d'un petit diamètre, il ne faille que quelques grammes pour faire équilibre à cette pression.

Après avoir fait céder tout le fond de la caisse, on a cherché comment le sable se comportait quand une partie seulement de ce fond est rendue mobile: à cet effet, on a entrepris une suite d'expériences dont nous allons rendre compte.

I^re. *expérience.* On a pris une caisse de 0^m,60 de longueur, sur 0^m,50 de largeur et 0^m,60 de hauteur; on a cloué, contre ses parois verticales, une partie des planches qui en composent le fond, afin d'avoir la pression exercée sur la partie *ab* (*Fig.* 10), qui restait mobile et reposait sur le plateau de la balance. L'ouverture *df*, laissée au fond, a toujours eu pour longueur la largeur, 0^m,50, de la caisse : sa largeur seule a varié.

On a trouvé, comme dans les expériences où tout le fond pouvait céder, que la pression exercée sur la partie mobile *ab*, décroissait à mesure qu'elle s'abaissait; puis un prisme *abc* se détachait tout à coup, et laissait voir, au-dessus de l'ouverture de la caisse, une voûte en ogive *def*, qui semblait supporter tout le massif superposé.

Dans les premières expériences, l'ouverture de la caisse avait 0^m,20 de large; on a augmenté cette largeur peu à peu, et l'on a obtenu le même résultat jusqu'à 0^m,35; quand l'ouverture atteignait cette largeur, le moindre ébranlement faisait crouler l'ogive, et tout le prisme de sable s'éboulait, laissant des talus toujours plus raides que 45°. L'expérience a été répétée en chargeant le sable de 200 kil., sans que le résultat ait varié.

Dans une de ces expériences, l'ogive s'étant formée sans surcharge, on a mis, sur le sable, un poids de

200 kil., qui, loin de la faire écrouler, a paru la consolider.

II^e. *expérience.* La petite voûte ne pouvant plus se soutenir toute seule, quand l'ouverture de la caisse avait plus de 35 centimètres de largeur, on a cherché quelle loi suivait la pression exercée sur le fond mobile, en lui donnant $0^m,40$ de largeur.

A mesure qu'on déchargeait le plateau opposé à celui qui était sous la caisse, la pression exercée sur le fond mobile, devenait moindre; et enfin, quand il s'est détaché entraînant, dans sa chute, tout le sable moins les deux prismes *abc* (*Fig.* 11), il n'y avait sur le plateau, pour faire équilibre à la pression, qu'un poids de . . . . . 38 kilog.

On a répété la même expérience, en chargeant le sable d'un poids de 200 kil., et le plateau est parti à . . . . . 36 *id.*

Enfin on a mis un poids de 400 kil., et le plateau n'est parti qu'à . . . . . 33 *id.*

ainsi la pression décroissait quand le poids augmentait.

Pour juger de l'influence que la hauteur du sable contenu dans la caisse, pouvait avoir sur ce résultat, on a fait l'expérience suivante.

III^e. *expérience.* On a pris une caisse de $1^m,00$ de long sur $0^m,50$ de large et $0^m,80$ de hauteur, on l'a remplie de sable, et l'on a répété l'expérience précédente en laissant à l'ouverture la même largeur.

Le sable étant sans surcharge, le plateau est parti à . . . . . 25 kilog.

Le sable étant chargé de 100 kil., il est parti à . . . . . 26 *id.*

Enfin la surcharge étant de 200 kil., il est parti à . . . . . 39 kilog.

Ayant réduit la hauteur du sable contenu dans la caisse, à $0^m,30$, on a trouvé que :

sans charge sur le sable, le plateau partait à 37 kilog.
qu'avec une surcharge de 100 kilog., il partait à . . . . . 59 *id.*
et qu'enfin en le chargeant de 200 kil., il partait à . . . . . 77 *id.*

En dernier lieu, on n'a plus mis qu'une hauteur de $0^m,2$ de sable dans la caisse, et l'on a répété la même expérience. Voici les résultats obtenus :

sans surcharge sur le sable, le plateau est parti à. . . . . 31 kilog
le sable étant surchargé de 100 kil., il est parti à. . . . . 65 *id.*
et la surcharge ayant été portée à 200 kil., il est parti à . . . . . 103 *id.*

IV^e^. *expérience.* Pour découvrir si l'influence de la hauteur se maintiendrait en agrandissant l'ouverture du fond, on a porté la largeur de celle-ci à $0^m,75$; de sorte qu'elle a eu, comme toujours, $0^m,50$ de long sur $0^m,75$ de large ; on a mis dans la caisse une hauteur de sable de $0^m,30$, et, en agissant comme dans les expériences précédentes, on a obtenu les résultats qui suivent :

sans surcharge sur le sable, le plateau est parti à. . . . . 97 kilog.
avec une surcharge de 200 kil., il est parti à. . . . . 235 *id.*
avec une surcharge de 400 kil., il est parti à. . . . . 412 *id.*

Cette expérience a été répétée en mettant une hauteur de sable de $0^m,60$, et l'on a trouvé :

que, sans surcharge sur le sable, le plateau partait à . . . . . 94 kilog.
qu'avec une surcharge de 200 kil., il partait à . . . . . 111 *id.*
et qu'avec une surcharge de 400 kil., il partait à . . . . . 150 *id.*

Enfin, ayant mis, dans la caisse, une hauteur de sable, de 0^m80, on a chargé celui-ci de 200 kil., et le plateau est parti à . . . . . 119 kilog.

Dans toutes ces expériences, on a fait reposer la surcharge sur un plateau de bois, qui avait des dimensions un peu moindres que celles de l'ouverture du fond de la caisse; on a remarqué qu'en chargeant le sable de poids placés vers les extrémités du plateau, la pression, sur ce fond, était un peu diminuée : l'augmentation du frottement était donc plus sensible que celle de la charge.

Pour apprécier l'influence que les dimensions de ce plateau pouvaient exercer sur la pression supportée par le fond mobile, on a fait les expériences suivantes.

V^e *expérience*. L'ouverture du fond ayant toujours $0^m,75$ de large, et la hauteur de sable étant de $0^m,60$, on a mis, sur ce sable, un plateau en bois de $0^m,96$ de long sur $0^m,48$ de large, et l'ayant chargé de 400 kil., le plateau de la balance n'est parti qu'à . . 107^k 00.

On a répété la même expérience en réduisant la hauteur du sable à $0^m,20$, et le plateau est parti à 100^k.

Ayant réduit à $0^m,40$ la largeur de l'ouverture du fond, on a mis une hauteur de sable de $0^m,40$, et,

. . . . . .

toutes choses restant les mêmes, on a fait varier peu à peu la longueur du plateau supérieur, qui a toujours conservé la même largeur de $0^m,48$, et la même charge de 200 kilog., sauf dans la première expérience. Voici les résultats obtenus :

Longueur du plateau supérieur.	Surcharge d'id.	Départ de la balance à
$0^m,96$	0 kilog.	37 kilog.
0 ,96	200	37
0 ,80	*id.*	37
0 ,75	*id.*	31
0 ,65	*id.*	32
0 ,60	*id.*	32
0 ,55	*id.*	33
0 ,50	*id.*	33
0 ,45	*id.*	34
0 ,40	*id.*	38
0 ,35	*id.*	41
0 ,30	*id.*	45
0 ,25	*id.*	53
0 ,20	*id.*	92

Tant que le plateau supérieur a conservé plus de $0^m,60$ de longueur, la charge restait immobile, et la balance n'emportait, dans son mouvement, qu'un prisme de sable *abcd* (*Fig.* 13); mais, dès que cette longueur est devenue moindre que $0^m,60$, la charge est descendue avec la balance.

Le plateau ayant $0^m,60$ de longueur, on a doublé la charge, qui a été portée à 400 kilog., et la balance est partie à $32^k,00$, comme avec la charge de 200 kilog.

Enfin, le plateau supérieur ayant $0^m,60$ de longueur, on a réduit l'épaisseur du sable à $0^m,20$, et

chargé ce plateau à 200 kilog., la balance est partie à $36^{k},00$.

La propriété qu'a le sable de ne pouvoir prendre son niveau de lui-même, et de s'ébouler toujours suivant un certain talus, explique la formation de la voûte observée dans la première expérience.

Supposons que les lignes *ad* et *bc* (*Fig.* 12) donnent l'inclinaison suivant laquelle le sable se maintient tout seul, la cohésion et le frottement suivant les lignes *ad* et *bc* tendent à empêcher la chute du prisme *adcb*; mais toutes les parties de ce prisme ne sont pas retenues également.

Considérons, dans l'ogive *apb*, les pressions exercées sur les deux petits prismes *bfe* et *bfhg*; tous les deux sont poussés au vide par le prisme *hgck* qui tend à glisser sur *bc*; mais, dans le sens opposé, le prisme *bfe* est poussé au vide par le prisme *efno*, tandis que le prisme *bfhg* est retenu contre *bc* par toute l'action du prisme *fhmn*. Il est donc naturel que le prisme *abp* se détache le premier, et laisse après sa chute la voûte observée.

Quand la partie *ab* vient à céder, la pression qu'elle supportait primitivement ne diminue que peu à peu; mais quand les molécules, en se comprimant, ont formé la voûte, *ab* ne supporte plus qu'un poids égal à celui du prisme qui se détache.

On voit, par le raisonnement établi sur les petits prismes *bfe* et *bfhg*, que la stabilité de la voûte doit devenir moindre, à mesure qu'on se rapproche de sa clef en s'éloignant des points d'appui *ad* et *bc*. C'est, en effet, par la clef, que la voûte s'éboule quand on agrandit l'ouverture *ab*.

Les résultats obtenus dans la deuxième expérience, prouvent que, quoique la voûte n'ait pu se soutenir toute seule, elle n'en exerçait pas moins, pour décharger la partie du fond qui cédait, une influence qui tendait à augmenter avec le poids de la surcharge supérieure.

La troisième expérience prouve qu'au-dessous d'une certaine hauteur, le sable ne peut plus s'arc-bouter pour décharger la partie du fond qui cède à la pression qu'elle supportait primitivement, et qu'au delà d'une certaine limite, qui varie probablement avec la largeur de l'ouverture, l'augmentation de hauteur ne produit plus d'effet.

Les résultats de la quatrième expérience prouvent que, quand l'ouverture du fond prend de trop grandes dimensions, les pressions exercées sur la partie qui cède, s'éloignent beaucoup moins des pressions primitives. L'influence qu'exerce la hauteur du sable, paraît diminuer moins rapidement; toutefois elle ne suffit pas pour rétablir l'arc-boutement au-dessus de la partie du fond qui a cédé.

Enfin, la cinquième expérience prouve que, quand une partie du fond vient à manquer, la surcharge supportée par le sable, ne se trouve sans appui, que sur une largeur presque égale à celle de la partie du fond qui a cédé; ce fait était important à constater, pour qu'on n'attribuât pas au sable seul, une propriété qui ne vient que de l'inflexibilité de la base sur laquelle repose la surcharge. Il ne paraît pas néanmoins que ce résultat doive être de longue durée : le sable, en s'éboulant peu à peu, doit céder à l'action de la surcharge, pour reprendre sa surface d'équilibre.

Les observations relatives au cas où tout le fond cédait, s'appliquent aussi à celui où une partie seulement vient à manquer; le frottement qui avait lieu contre les parois, s'opère alors contre les talus *ad* et *bc* (*Fig.* 13), que prend le sable, et l'adhérence doit être remplacée par la cohésion. Observons cependant que le prisme *abcd*, qui tend à se détacher, ne peut prendre son mouvement qu'après un dérangement préalable des grains de sable, qui lui enlève la forme de voussoir. Ce dérangement commence, ainsi qu'on l'a vu, par le prisme *aeb*, qui est moins soutenu que le reste de la masse; à mesure que l'ouverture *ab* s'élargit, la cohésion restant la même pour une même charge, la rupture, dans les environs de *ef*, devient plus facile, et, dès qu'elle a eu lieu, on rentre dans un cas semblable à celui où tout le fond vient à céder; c'est-à-dire que les pressions exercées sur la partie du fond qui cède, n'étant diminuées que par le frottement; elles croissent avec les surcharges.

Quoique la propriété qu'offre le sable de s'arc-bouter au-dessus de la partie du fond qui vient à céder, n'ait plus lieu quand cette partie prend une certaine extension, elle n'en est pas moins d'une grande importance pour l'emploi du sable dans les fondations. En effet, les mouvemens des constructions supérieures étant très-lents, les pressions supportées par les diverses parties du fond, s'éloignent peu des pressions primitives; dès qu'une partie viendra à céder, elle sera déchargée aux dépens de celles qui l'entourent, et il s'établira une multitude de petites ogives dont les piédroits s'appuieront sur les parties les plus résistantes du fond, jusqu'à ce qu'enfin ce fond ayant

pris une forme telle que la résistance soit partout la même, le massif de sable, dont la forme se modifie en même temps, vienne s'appuyer également sur tous ses points.

La balance nous a paru offrir le moyen le plus sûr pour apprécier les pressions exercées, par le sable, sur le fond des caisses qui le contiennent; les résultats obtenus dans les expériences que nous venons de rapporter, diffèrent de ceux que M. Moreau a consignés dans sa *Notice* insérée au N°. 11 du *Mémorial*; n'ayant pas de détails sur la manière dont il a opéré, il nous est impossible de deviner la cause de cette différence. S'il a fait reposer le poids dont il chargeait le sable, sur un plateau ayant des dimensions plus grandes que celle de l'ouverture pratiquée au fond de la caisse, ou si les poids avaient, eux-mêmes, des dimensions telles qu'ils pussent reposer sur les parties du massif de sable, non susceptibles de céder, les résultats auxquels il est parvenu, rentreraient dans ceux qui ont été donnés par la cinquième expérience ci-dessus.

Après avoir cherché comment le sable répartit la pression sur le fond du vase qui le contient, dans le cas où ce fond vient à céder en totalité ou en partie, nous nous sommes proposé d'étudier son action sur les parois latérales.

Pour cela, nous avons pris une caisse de $0^m,70$ de longueur sur $0^m,70$ de hauteur et $0^m,60$ de largeur; l'une de ses parois verticales, de $0^m,60$ de largeur, a été composée de deux parties *ab* et *cd* (*Fig.* 14) ayant chacune $0^m,35$ de hauteur, et pouvant glisser, de haut en bas, dans une coulisse *ca*. La caisse étant remplie de sable, on a pu, au moyen des deux parties mobiles,

le mettre à nu sur chacun des points de la paroi *ef*; voici les résultats obtenus.

Quand on éloignait les deux parties mobiles *ab* et *cd* de moins de $0^m,20$, le sable se soutenait tout seul; si on continuait à élargir l'ouverture *ac*, il se détachait un prisme *aghk*; enfin, si on donnait à l'ouverture plus de $0^m,35$, le sable s'éboulait suivant le talus *al*.

Le résultat a été le même pour tous les points de la paroi *ef*, pourvu que, vers sa partie supérieure, le sable fût maintenu sur une hauteur d'au moins $0^m,10$. En abaissant, à la fois, les deux coulisses pour mettre à nu le sable dans sa partie supérieure, il se maintenait tout seul jusqu'à $0^m,20$; au delà de cette hauteur il s'éboulait.

Les mêmes expériences ont été répétées avec des charges de 200 et 400 kil., et l'on a obtenu les mêmes résultats.

On voit, d'après cela, que le sable se comporte, dans sa pression sur les côtés de la caisse, à peu de chose près comme dans sa pression sur le fond; si une partie de la paroi latérale vient à manquer, il s'arc-boute pour reporter la pression sur les parties qui résistent; mais, au delà d'une certaine limite, la cohésion et le frottement ne suffisent plus pour retenir les grains de sable, et l'éboulement s'opère.

L'explication qui a été donnée ci-dessus de la formation de l'ogive, est confirmée par la disposition que conserve le sable quand le prisme *aghk* s'est détaché. Dans les deux cas, les grains que la pression des couches supérieures ne peut pas retenir contre des points fixes, sont les premiers à céder à l'action de la pesanteur.

Nous n'avons point parlé jusqu'ici des talus que prend le sable quand il n'est plus soutenu latéralement; ils paraissent varier avec l'humidité de ce sable et la charge qu'il supporte; jamais, dans nos expériences, ils n'ont fait, avec l'horizon, des angles moindres que 45°, et, quand on mouillait le sable, il se tenait sous des plans plus raides. La compression qu'il avait éprouvée produisait des effets plus sensibles encore, et souvent alors il se soutenait sous une inclinaison de trois de hauteur sur un de base; mais un effort léger suffisait pour changer ce talus.

En chargeant un massif de sable, dont les talus sont à 45°, d'un poids considérable, la pyramide s'affaisse, les talus reculent parallèlement à eux-mêmes; mais ils conservent, à peu de chose près, leur inclinaison primitive. Il semble donc que cette inclinaison doit être considérée comme l'inclinaison naturelle au sable sur lequel nous avons opéré.

La pression que le sable exerce sur les parois verticales qui le contiennent, pourrait être calculée d'après l'action du prisme de plus grande poussée; mais nous avons cherché à déterminer quel empâtement il faudrait donner à un massif de sable, chargé d'un certain poids, pour que les couches latérales fissent équilibre à l'accroissement de poussée dû à ce poids.

Pour y parvenir, nous avons pris une caisse sans fond (*Fig.* 15), de $3^m,50$ de long, sur $2^m,00$ de large et $1^m,00$ de hauteur; après l'avoir posée sur un sol bien nivelé, on l'a remplie de sable, et on a élevé, sur une de ses extrémités, un massif formé de gueuses de fonte du poids de 1000 kil., qui reposait sur un plateau de madriers de $1^m,90$ de long et $0^m,80$ de

large, de sorte que la pression était de 9868 kil. par mètre carré. Pendant le chargement, le plateau ne s'est pas enfoncé de plus de trois millimètres; on a laissé le massif reposer sur le sable jusqu'au lendemain, et l'on a remarqué que l'enfoncement du plateau n'avait pas augmenté, et que, sur les côtés, les grains de sable n'avaient pas éprouvé le moindre dérangement. Ayant ensuite abattu la paroi qui se trouvait du côté opposé à la charge, et qui avait $2^m,00$ de large sur $1^m,00$ de haut, le sable s'est éboulé suivant son talus naturel, d'à peu près 45°, sans que la charge ait bougé, et ce talus se reproduisait en reculant parallèlement à lui-même, quand on enlevait, peu à peu, du sable à sa partie inférieure. Lorsqu'on fut ainsi parvenu à un point a tel que le sommet g du talus, ne se trouvait plus éloigné, du pied du massif de fonte, que de $1^m,05$, ce massif s'est penché sur le côté et a croulé. C'était donc vers ce point que la poussée, due à la charge, commençait à se faire sentir. Ainsi, en élevant au point a, une paroi verticale ab, elle n'aurait eu à résister qu'à l'action de la poussée provenant du prisme de sable bac.

Afin de découvrir l'effort auquel résiste le prisme $adeg$, supposons que le sable, sur lequel repose le massif de fonte, soit retenu par une paroi verticale ed, la valeur de la plus grande poussée agissant contre elle, sera donnée par la formule

$$P=\tfrac{1}{2}p\,\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}\alpha\,h(h-h'),$$

(N°. 4 du *Mémorial de l'officier du génie*, pag. 167).

Chacune des quantités qui la composent nous est connue; le poids du sablé est de 1683 kilogram. le

mètre cube, et nous avons vu, dans les expériences sur la poussée latérale, que la hauteur h', sous laquelle il pouvait se soutenir à pic, était de $0^m,20$. Substituant, on trouve $P=611^k,07$. Or, le poids du prisme *adeg*, qui fait équilibre à cette pression, est de $5217^k,30$, dont le rapport P est

$$\frac{5217,30}{611,07}=8,55.$$

Quoique le frottement du sable contre le sol, doive faire varier ce rapport avec les dimensions du massif *adeg*, ce ne sera que dans des limites peu étendues, qui seront d'ailleurs appréciées par d'autres expériences. Quel que soit, au surplus, le terrain sur lequel on ait à s'établir, les parois latérales offriront toujours une certaine résistance, et l'on pourra, soit au moyen de l'empâtement donné au sable, soit au moyen de parafouilles en béton, ou de palplanches, la rendre telle que ces parois ne soient plus déprimées par la poussée latérale.

Pour constater, plus en grand, l'effet que peut produire l'emploi du sable dans les fondations, et obtenir des données sur son application aux travaux d'agrandissement de la place de Bayonne, on a fait les deux expériences que nous allons décrire, sur le bord du fossé de la contregarde du bastion du nord, au point même où une sonde, poussée jusqu'à 20 mètres de profondeur, n'a indiqué que du sable vaseux.

I^re^. *expérience*. (*Fig.* 16.) On a pratiqué une excavation dont la section horizontale était un carré de $1^m,20$ de côté; on lui a donné $2^m,84$ de profondeur, afin que son fond se trouvât à $1^m,30$ au-dessous de

celui du fossé de la contregarde, qui est habituellement plein d'eau; cette excavation a été remplie de sable jusqu'à une hauteur de $1^m,20$. Sur ce sable, on a mis un plateau de bois de chêne, de $0^m,05$ d'épaisseur, formant un carré de $1^m,20$ de côté; les parois verticales de l'excavation ayant éprouvé quelques éboulemens, le plateau se trouvait avoir des dimensions un peu moindres que la section correspondante de cette excavation; de sorte que, sur les quatre côtés, il ne recouvrait pas complétement le sable.

Le plateau ayant été établi horizontalement et comprimé par le poids d'un homme, on a relevé sa hauteur avec un niveau à bulle d'air, puis on l'a chargé de 580 gueuses, en fonte, pesant chacune 50 kilog., et formant, par conséquent, un poids de 29 mille kilog. Pendant le chargement, le plateau s'est enfoncé de $0^m,065$; on a laissé la charge agir pendant 14 jours, et tous les deux jours on prenait la hauteur du plateau rapportée à un repère invariable. Voici quels ont été les tassemens observés :

22 novembre, pendant le chargement, .	$0^m,0650$
24 *idem*	0, 0500
26 *idem*	0, 0050
28 *idem*	0, 0025
1^er^. décembre.	0, 0025
3 *idem*	0, 0003
5 *idem*	0, 0003
7 *idem*	0, 0003
Total.	$0^m,1259$

Pendant les trois premiers jours, le massif de fonte qui avait $3^m,20$ de hauteur, a pris une légère indi-

naison, mais ensuite il s'est maintenu dans le même état, sans changement appréciable.

Le 7 décembre, ayant enlevé les gueuses, on a remarqué que le plateau de bois ne s'était presque pas enfoncé dans le sable : cette remarque s'applique également à toutes les expériences rapportées.

II^me^. *expérience* (*Fig.* 16). A une distance de 3 mètres de la première excavation, on en a fait une autre semblable, mais dont le fond se trouvait à o^m^,52 plus haut, de manière à correspondre, à peu près, au centre du massif de sable de la précédente. On a appliqué, sur son fond, un plateau en madriers, pareil à celui qui avait été placé sur le sable, et établi de la même manière; on a pris sa cote, et l'on a commencé le chargement, pendant lequel le tassement a été de o^m^,270 : le massif de fonte s'étant incliné fortement d'un côté, on a été forcé de mettre une grande partie de la charge sur le côté opposé, où elle est restée jusqu'à la fin de l'expérience. Voici les tassemens tels qu'ils ont été observés tous les deux jours :

Le 8 décembre,	pendant le chargement.	o^m^,2700
10	*idem*.	0 ,0300
12	*idem*.	0 ,0200
14	*idem*.	0 ,0100
16	*idem*.	0 ,0125
18	*idem*.	0 ,0075
20	*idem*.	0 ,0000
22	*idem*.	0 ,0000
	Total. . .	o^m^,3500

Pendant les deux expériences, les excavations qui n'avaient été épuisées, de l'eau qu'elles contenaient,

que pour poser les plateaux, sont restées pleines jusqu'à une hauteur d'un mètre environ au-dessous des bords, de sorte que le terrain, déjà vaseux, était constamment en contact avec l'eau. En comparant entre eux les tassemens qui ont eu lieu dans ces deux expériences, on voit que le dernier n'est guères plus que le tiers de l'autre; la différence porte principalement sur les tassemens survenus pendant le chargement.

On voit que les résultats de ces deux expériences comparatives, sont très-favorables à l'emploi du sable, non-seulement à cause de la différence des tassemens, mais encore par la difficulté qu'on a eue d'empêcher le renversement du massif de fonte dans le cas où il reposait immédiatement sur le sol. On avait choisi le saillant de la contregarde du bastion du nord, parceque c'est un des points par lesquels doit passer la nouvelle enceinte de la place. Le chargement supporté par les plateaux de bois, étant de 20138 kilog. par mètre carré, c'est à peu près le poids d'une escarpe de 10^m de hauteur, fondée sans empâtement. Les fondations de l'enceinte projetée seront, il est vrai, situées à 3^m au-dessous du fond de l'excavation la plus profonde de nos expériences; mais il est probable qu'à mesure qu'on s'enfoncera, le terrain sera trouvé de moins en moins compressible.

Le massif de sable de la première expérience n'ayant pas reçu d'empâtemens, la pression latérale a pu causer l'inclinaison du massif de fonte; afin d'apprécier l'influence qu'elle a eue sur le tassement éprouvé par le plateau, on peut calculer, comme nous l'avons déjà fait ci-dessus, l'action exercée sur une des parois verti-

cales, par le prisme de plus grande poussée du massif de sable et par la charge qu'elle supporte. On trouve ainsi que la poussée, sur chaque paroi, est de 1422 kilog.; la totalité de l'action latérale a donc été de 5688 kil. ; or, le poids entier du massif de fonte et du sable est de 31908; on a donc $\frac{31908}{5688} = 5{,}61$. Le tassement total ayant été de $0^m{,}1259$, celui qui est dû simplement à la pression latérale, peut être évalué à $\frac{0^m{,}1259}{5{,}61}$ $= 0^m{,}0222$ environ.

Il résulte, de là, que, si l'on avait donné des empâtemens suffisans pour éviter les effets de la pression latérale, le massif de fonte ne se serait abaissé que de $0^m{,}1037$. Dans l'enceinte projetée, les effets de la pression latérale sont évités, et les empâtemens donnés aux maçonneries, réduisent la pression verticale à 14159 kilog. par mètre carré, de sorte que le tassement se trouvera lui-même réduit à $0^m{,}07$.

En dernière analyse, si l'on examine les propriétés dont jouit le sable, on est porté à conclure :

1°. Que la poussée latérale ne pouvant, de quelque manière qu'on la conçoive, diminuer en rien la pression verticale du sable, qui est égale à son poids augmenté de la surcharge, ne saurait avoir d'influence que sur la répartition de cette pression;

2°. Que les effets de la poussée latérale augmentant, en pure perte, le tassement des constructions, et pouvant leur faire prendre de l'inclinaison, surtout quand les parois verticales sont déprimées vers leur partie supérieure, il faut chercher à les éviter en donnant au massif de sable, un empâtement proportionné à la résistance des parois verticales de l'excavation;

3°. Que le sable ne jouit point de la propriété de s'arc-bouter, en voûte, sur des distances assez grandes pour que la poussée latérale qui en résulterait, vienne déprimer les parois verticales, en même temps que la charge qu'elles supportent directement, les écraserait;

4°. Que la propriété qu'a le sable de s'arc-bouter au-dessus des parties du fond qui cèdent, empêche que les résistances inégales, de ce fond, viennent provoquer des ruptures dans la maçonnerie, et contribue à donner au sol de l'excavation, une forme telle que la résistance soit partout la même;

5°. Que si le terrain sur lequel repose le massif de sable vient à céder inégalement, ce massif, qui est incompressible (*), pressé inégalement aussi dans sa partie supérieure, par les assises de libages, change de forme de manière à rétablir l'équilibre sous la surface des fondations;

6°. Enfin, que cette dernière propriété, que le sable doit à sa mobilité et à son incompressibilité, est la seule qui explique les grands avantages offerts par son emploi, dans les fondations: car, dans tout autre cas, et si on fait abstraction de la dépense, il peut être remplacé, avec succès, par un massif de maçonnerie en chaux assez hydraulique pour prendre rapidement.

(*) Des expériences nombreuses ont prouvé que le sable ne prend tout son tassement que lorsqu'il est dans l'eau; on ne doit donc le supposer incompressible qu'autant qu'on aura pu le submerger avant de poser la 1re assise des fondations.

NOTICE

SUR UNE MACHINE

A ÉLEVER LES FARDEAUX,

PAR LE POIDS DES HOMMES;

Par M. COIGNET, Capitaine du Génie.

Les travaux que j'ai été chargé de faire exécuter en 1831 et 1832, à Vincennes, comprenaient, entre autres, une partie de terrassement offrant un déblai de 50,000 mètres cubes de terre, à prendre dans les fossés du château et à monter à la hauteur des glacis. Comme le roulage des terres, au tombereau ou à la brouette, eût exigé l'établissement de rampes très-coûteuses, le long d'une contrescarpe revêtue de 13^{m},00 de hauteur, j'ai recherché un moyen d'effectuer ce travail de la manière la plus économique possible, en employant le poids des hommes, et mettant à profit un principe déjà indiqué par Coulomb, et qui n'avait pas encore été mis en pratique jusqu'ici.

On lit, dans son mémoire sur la force des hommes

Principe de Coulomb sur la meilleure manière d'employer la force des hommes.

(*Théorie des machines simples*, page 295) : « Si un » homme montait librement un escalier, et qu'en se » laissant tomber par un moyen quelconque, il élevât » un poids égal au sien propre, il produirait à peu près « autant d'effet, ou ferait autant de travail que quatre » hommes montant à dos le même poids. Cette obser- » vation me paraît être de la plus grande importance » pour diriger les mécaniciens dans la construction des » machines destinées à être mues par des hommes, dont » il faut toujours que les forces soient employées de » la manière la plus avantageuse pour l'effet utile. »

J'ai cherché à satisfaire à ces conditions par l'appareil très-simple qui fait l'objet de la présente notice.

Des expériences en grand, effectuées dans les années 1831 et 1832 sur plus de 55000 mètres cubes de terre, moellons, pierres et mortier, élevés à 13^{m},00 ou environ, et une dernière expérience, en 1833, sur 1500 mètres cubes de terre élevés, à 24 mètres de hauteur, au moyen de cet appareil, ne permettent plus de douter qu'il résolve complètement, et de la manière la plus avantageuse, le problème dont Coulomb avait posé l'énoncé; l'économie de main-d'œuvre qu'on obtient, ainsi que la variété des applications auxquelles il se prête, ne laissent, je le pense, rien à désirer.

Dans le cas principal qu'on avait à traiter, celui de l'approfondissement d'un fossé pour fournir les terres nécessaires au rechargement d'un glacis, les transports horizontaux ne devaient être que d'un à trois relais de 30 mèt., et, en outre, le travail devait se faire, en grande partie, pendant l'hiver. Il y avait donc économie et convenance à adopter la brouette

comme instrument de roulage, et c'est ce que j'ai fait. Cela posé, le problème à résoudre, envisagé dans tous ses détails, consistait à remplir les conditions suivantes.

Conditions à remplir par la machine projetée.

1°. Établir un système de deux plateaux liés entre eux par une corde passant sur une poulie, et destinés à recevoir, d'un côté, un rouleur avec une brouette vide, et, de l'autre, la terre à élever, chargée dans une autre brouette, en quantité suffisante pour faire équilibre au poids du rouleur.

2°. Imprimer à ce système, établi en encorbellement au-dessus du fossé, un mouvement vertical qui, en faisant descendre le rouleur servant de contrepoids, entraîne et enlève la brouette chargée de terre.

3°. Modérer ou accélérer ce mouvement vertical en raison de l'inégalité accidentelle des poids destinés à se faire équilibre.

4°. Empêcher que, dans leur ascension, les plateaux n'éprouvent des mouvemens de rotation ou d'oscillation autour du point de suspension.

5°. Fixer et arrêter le plateau chargé d'une brouette pleine, au moment où il arrive à la partie la plus élevée de sa course, de manière que le rouleur puisse marcher dessus, sans danger, pour en faire sortir cette brouette et la conduire à destination.

6°. Rendre de nouveau ce plateau mobile pour lui permettre de descendre aussitôt qu'étant chargé d'un nouveau rouleur avec sa brouette vide, l'autre plateau se trouve chargé d'une brouette pleine.

7°. Enfin, empêcher que, par imprudence ou maladresse, un rouleur ne vienne à faire descendre le plateau sur lequel il est monté, avant que la brouette

pleine, qui doit lui faire contre-poids, soit placée sur le plateau inférieur, circonstance qui, à cause de la rapidité du mouvement, pourrait occasioner les accidens les plus graves.

Ces différentes conditions ont été remplies par *les* dispositifs exprimés sur la Pl. V, et décrits en détail dans la *Légende explicative* placée à la fin de cette notice, légende à laquelle on va joindre quelques éclaircissemens indispensables.

Manière dont elles ont été remplies, et observations particulières.

1°. Le plancher, en encorbellement, sur le cadre duquel sont assemblés les plateaux qui supportent la roue par l'intermédiaire des moises, est percé de deux ouvertures rectangulaires de la dimension convenable pour le passage d'un plateau chargé d'une brouette. Chacune de ces ouvertures est alternativement fermée par un plateau chargé d'une brouette pleine de terre, et qui est élevé par le contre-poids du rouleur et de sa brouette vide, descendant sur l'autre plateau.

L'expérience a prouvé qu'une brouettée de terre, de la nature de celle qui a été déblayée, pèse moyennement $72^{k},50$, et qu'il en faut 24,80 pour un mètre cube de terre. Le poids de la brouettée de terre correspond donc, à peu près, à celui d'un homme de moyenne taille, qu'on évalue à $70^{k},00$.

2°. et 3°. Un homme, placé sur un petit plancher qui sépare, l'une de l'autre, les deux ouvertures mentionnées, surmonte les frottemens, imprime, accélère ou modère le mouvement en saisissant le câble auquel sont suspendus les plateaux.

Les fonctions de cet homme ne se réduisent pas, d'ailleurs, au simple exercice de son intelligence; il emploie encore la force musculaire de ses bras en

l'appliquant au câble, et l'ajoutant généralement au poids du rouleur placé sur le plateau descendant; ce qui permet de charger davantage la brouette, et d'augmenter ainsi le produit de la machine.

Il est important que ce surveillant ait toujours les mains garnies de gants en cuir fort, afin que, dans le cas où un accident arriverait, il ne craigne pas de se les brûler en cherchant à retenir le câble, s'il filait trop rapidement. Ces gants ont deux épaisseurs de cuir en dedans, de manière qu'on puisse facilement en renouveler la partie extérieure lorsqu'elle est usée. Le surveillant intelligent et exercé à cette manœuvre, modère à volonté, par la pression progressive des mains sur le câble, la vitesse de descente du plateau, et généralement les accidens ne peuvent être dus qu'à sa négligence. Il doit veiller à ce que le rouleur, qui revient se placer avec une brouette vide sur le plateau supérieur, ne parte que lorsque le plateau inférieur est chargé d'une brouette pleine. S'il arrivait que, par une trop grande inégalité de poids dans la charge des plateaux, le surveillant fût obligé de s'adjoindre un rouleur pour l'aider à vaincre la résistance qu'il rencontre, ce rouleur devrait toujours appliquer sa force comme celle du surveillant, de haut en bas, du même côté du cordage, et jamais de bas en haut, sur l'autre côté; ce qui pourrait occasioner des accidens graves, en faisant sortir le câble de la gorge de la poulie.

Pour empêcher, autant qu'il est possible, ce fâcheux résultat, deux petites tringles $w'w'$, sont clouées, sur la face supérieure des moises, contre le câble, pour l'empêcher de s'écarter de la gorge de la roue, et deux petits étriers en fer, $\&'\&'$, placés par-dessous ces

moises, empêchent que ce câble, venant à sortir de sa gorge et à retomber sur le moyeu, ne frappe avec violence le surveillant. Afin d'éviter un tel accident, il est très-important de s'assurer que la roue n'est pas gauche, et qu'elle ne frotte pas contre quelques parties des moises. Il faut aussi avoir soin que les plateaux et les brouettes employés soient de même poids, et que ces dernières soient de même contenance, pour ne pas ajouter de nouvelles inégalités à celles qui proviennent du fait des hommes et du chargement des brouettes.

4°. Les mouvemens de rotation et d'oscillation des plateaux, autour du point de suspension, sont empêchés au moyen de deux tringles conductrices en fer, *rr*, tendues verticalement, du bas en haut, et le long desquelles glissent deux des angles opposés de chaque plateau. Ces angles y sont retenus par une bague ou *prisonnier* en fer, *y*.

5°. La consolidation du plateau, au moment de son arrivée au niveau du plancher supérieur, *étant* un objet de la dernière importance, on a voulu qu'elle ait lieu indépendamment de la volonté des ouvriers, et c'est à quoi on est parvenu en employant des ressorts. Au moment où le plateau atteint le niveau du plancher avec la vitesse, d'environ 1^{m} par seconde, qui convient au service de la machine, il écarte, au moyen de deux mentonnets renversés et fixés sur les côtés, deux autres mentonnets droits, soudés à deux lames, en acier, faisant ressort. L'extrémité inférieure de ces lames est attachée, par trois fortes vis, à des potelets *n*, assemblés à queue d'aronde dans les pièces du cadre du plancher supérieur.

Les mentonnets à ressort *m*, obéissent à la pression, reculent et reprennent leur position ordinaire, aussitôt que le bec des mentonnets fixes *n*, a dépassé le leur propre. Dès lors ces mentonnets reposent l'un sur l'autre, de chaque côté du plateau, qui ne peut plus prendre de mouvement qu'autour d'un axe horizontal. Mais ce mouvement même ne saurait avoir lieu, parce que les quatre extrémités *v*, du cadre du plateau, viennent buter dans le logement de quatre entailles *z*, pratiquées dans la charpente du plancher, logement où elles sont amenées inévitablement par les tringles conductrices.

Il résulte, de ces dispositions, que le plateau ne peut plus prendre qu'un léger mouvement de bascule, peu sensible et sans inconvénient, autour d'un axe horizontal passant par les mentonnets à ressort. Ainsi, dès qu'on s'est aperçu que les ressorts ont produit leur effet, on peut, sans aucune crainte, marcher sur le plateau qui est complétement fixé.

6°. On rend le plateau de nouveau mobile avec la plus grande facilité. Les mentonnets à ressort *m*, portent un manche en bois, qui dépasse le plancher à hauteur d'appui. Le plateau inférieur étant chargé, le rouleur du haut entre avec sa brouette vide sur le plateau supérieur, écarte avec ses mains les manches des ressorts, dégage, en les reculant, leurs mentonnets de ceux du plateau, et alors celui-ci n'étant plus soutenu, obéit à l'impulsion que lui communique le surveillant, en appuyant du pied sur la brouette, et des mains sur les cordes auxquelles le plateau est suspendu. Lorsque les poids chargés sur les plateaux, sont à peu près égaux, cette impulsion à donner n'est

pas très-grande ; mais lorsqu'il y a une inégalité sensible, le surveillant est obligé d'employer toute sa force, soit pour retenir, soit pour faire descendre le plateau.

Si la profondeur, de laquelle on doit tirer les matériaux, était considérable, l'inégalité de longueur des câbles de suspension serait une cause d'inégalité dans les poids, dont on devrait tenir compte, et qu'il serait très-facile de faire disparaître en attachant, au-dessous de chaque plateau, l'une des deux extrémités d'une corde compensatrice, ainsi que cela se pratique dans les puits d'extraction des mines d'une grande profondeur.

7°. Malgré la présence du surveillant ou pendant son absence, des imprudens pourraient se placer sur le plateau supérieur, écarter les ressorts pour descendre, sans s'inquiéter si le plateau inférieur est ou non chargé. Dans ce cas, l'homme n'ayant pas de contre-poids, est précipité avec une rapidité qui n'aurait pas de suites fâcheuses, si, conservant son sang-froid, il saisissait l'extrémité pendante du câble, et se tenait sur la pointe des pieds ; mais lorsqu'il néglige cette précaution, le choc qu'il reçoit au moment où il touche terre, peut le projeter hors du plateau, et occasioner les accidens les plus graves. C'est pour les éviter qu'on a imaginé le tourniquet à bascule, qui est indiqué en *q*, et dont la légende explique la manœuvre. On doit exiger impérieusement que cette manœuvre soit effectuée par le rouleur inférieur, et ne pas tolérer de négligence à cet égard.

Après avoir expliqué, en détail, le jeu des différentes parties de la machine, leur but et leur nécessité,

nous allons donner une idée de la manière de s'en servir.

Un atelier, employé à élever les terres à 13^{m},00 de hauteur, au moyen de la machine, doit être composé de neuf terrassiers et un surveillant quand la terre, à un demi-homme à la fouille, est prise à un demi-relais horizontal pour le bas, et portée à un relais pareil en haut. Les rôles des terrassiers doivent être ainsi répartis, afin qu'il n'y ait pas de temps perdu : Un piocheur, deux pelleteurs, un rouleur ordinaire en bas et cinq rouleurs monteurs. Manœuvre de machine.

Au commencement de la reprise, le piocheur, les deux pelleteurs et le rouleur ordinaire descendent, à l'échelle, sur l'atelier qui doit être garni de trois brouettes en bas et de cinq en haut. Le rouleur conduit une brouette pleine sur le plateau du bas, et crie : *enlevez*, en faisant faire une demi-révolution au tourniquet q, dont la pince doit toujours être au-dessus du plateau inférieur, pendant les heures de repos, afin de prévenir les accidens. Un des rouleurs du haut se place aussitôt, avec sa brouette vide, sur l'autre plateau; écarte les ressorts, part, descend et arrive au moyen de l'impulsion qui lui est communiquée par le surveillant. Celui-ci, prévenu par le bruit des mentonnets à ressort, que ce mécanisme a rempli son office, et que le plateau est consolidé, crie : *sortez*. Aussitôt le rouleur qui vient de descendre sur le plateau, en sort avec sa brouette vide, la laisse près du pied de l'échelle et remonte; en même temps, un deuxième rouleur, placé d'avance à l'extrémité du plancher, en encorbellement, et vis-à-vis la trappe qui vient de se fermer, prend la brouette, la pousse au dehors

du plateau, et mène la terre à sa destination pour revenir ensuite.

Pendant ces manœuvres, le rouleur du bas a conduit une nouvelle brouette pleine, qui est élevée de la même manière que la première ; et, en s'en retournant, il emmène la brouette vide laissée au pied de l'échelle.

Les autres rouleurs recommencent successivement la manœuvre déjà décrite pour les deux premiers : ceux qui ont gravi l'échelle se plaçant, au fur et à mesure de leur arrivée, à l'extrémité de l'encorbellement et vis-à-vis de la trappe où monte la brouette pleine qu'ils doivent conduire, tandis que ceux qui reviennent avec une brouette vide, se tiennent en dehors, prêts à se placer sur le plateau qu'ont débarrassé leurs camarades.

Quant au rouleur du bas, il continue à emmener les brouettes vides laissées au pied de l'échelle, et à charger alternativement l'un et l'autre plateau en criant : *enlevez*, à chaque fois qu'il a fait faire une demi-révolution au tourniquet ; tandis que le surveillant crie : *sortez*, aussitôt qu'il est assuré que le plateau arrivant est consolidé.

Travail exécuté au moyen de la machine.

D'après l'observation du travail exécuté, pendant long-temps, au moyen de machines semblables à celle qu'on vient de décrire, j'ai trouvé que, pour une hauteur de 13 mètres, l'atelier étant composé, comme on vient de le dire, d'un surveillant et de neuf bons terrassiers travaillant à la tâche, on pioche, charge, monte et roule à 45 mètres, ou un relais et demi de distance horizontale, $37^{m.c.},500$ de terre mesurée sur le déblai, et qu'alors les ascensions se succèdent sans

interruption, de manière que la machine donne tout le produit dont elle est susceptible.

La hauteur de 13 mètres correspond, à peu près, à huit relais verticaux de 1m,60, qui, ajoutés à un relais et demi horizontal, donnent un total de neuf relais et demi. Si le travail se faisait à la brouette au moyen de rampes, il exigerait dix-neuf rouleurs pour deux pelleteurs. Le même travail est exécuté, au moyen de la machine, par sept terrassiers y compris le surveillant. En déduisant trois journées pour la main-d'œuvre du transport horizontal à un relais et demi, il reste quatre journées pour le transport vertical à huit relais, qui eût exigé seize journées en employant le transport en rampe; ce qui offre une économie, de 75 pour 100, très-importante lorsqu'il s'agit d'un travail considérable.

Pour apprécier cette économie avec exactitude, il faut tenir compte des frais d'établissement et d'entretien de la machine. Voici en quoi ils consistent pour la localité où l'on a opéré.

Devis du prix d'une machine à élever les terres.

	f. c.	f. c.	Frais qu'elle occasionne.
7 sellemens, de 0m,21 et au-dessus, à. . . .	1 ,15	8 ,05	
0m.c.,379 de bois de chêne, de 0m,16 et au-dessous, avec assemblage, à.	87 ,90	33 ,31	
1m.c.,926 de bois de chêne, de 0m,17 à 0m,30, avec assemblage, à.	89 ,90	173 ,15	
41 assemblages, de 0m,16 et au-dessous, à . .	1 ,10	45 ,10	
10 *idem* de 0,17, à.	1 ,70	17 ,00	
8m,00 courans de tringles, en chêne, de 0m,34 sur 0m,22, à.	1 ,55	12 ,40	
3m,10 courans, *id.*, *id.*, sur 0m,11, à. . . .	1 ,00	3 ,10	
8m,68 carrés de plancher, en chêne de bateau, à	2 ,60	22 ,57	
Report.		314f. ,68c.	

	f.	c.		
D'autre part, ci.			314f.	,68c.
23k,90 de fer de sujétion, à	1	,76	41	,83
67k, de fer, pour tringles conductrices, à . . .	0	,95	63	,65
4k,16 *id.* pour les 4 arcades, à.	1	,10	4	,58
5k,50 *id.* pour boulons et écrous des moises, à	1	,50	8	,25
9k,20 *id.* pour embrassures à oreilles des trous de plateaux, à	1	,30	11	,96
4 brides des tringles, à.	0	,65	2	,60
8 garnitures d'entailles des grandes barres des plateaux, à.	0	,33	2	,64
12 boulons pour fixer les brides et mentonnets, à.	0	,20	2	,40
4 mentonnets à ressorts, à.	3	,75	15	,00
2k,50 de plomb pour contre-poids des mentonnets, à.	0	,69	1	,73
Une roue en charronnage, avec frettes, etc., à	28	,25	28	,25
4 manches à ressorts, à.	0	,50	2	,00
15m courans d'échelle, à	2	,25	33	,75
2k,85 de corde, de 6 lignes, pour les plateaux, à	2	,20	6	,27
9k. de cable, à	1	,80	16	,20
Une paire de gants.	3	,25	3	,25
1 journée de menuisier-monteur, à.	4	,20	4	,20
1 journée de serrurier-monteur, à	4	,40	4	,40
1 journée de terrassier, à	2	,90	2	,90
Total.			570f.	,54c.

Les frais d'entretien d'une machine sont assez difficiles à évaluer, parce qu'ils dépendent beaucoup du soin et de l'intelligence des ouvriers. Néanmoins, d'après l'expérience que j'en ai acquise, je ne pense pas qu'ils s'élèvent à plus de $\frac{1}{15}$ du prix de la machine, y compris le renouvellement des petites cordes à chaque campagne, et des câbles qui doivent faire le service au moins pendant deux années.

Quant à la durée de la machine, elle doit être de dix ans au moins, puisqu'elle consiste presqu'entière-

ment en charpente qu'on pourrait peindre, et qu'on doit rentrer en magasin lorsque les travaux sont terminés.

Il résulte de ces détails, que les frais de machine peuvent être calculés ainsi qu'il suit :

Intérêt annuel de 570 francs.	28f. ,50c.
Consommation pendant le même temps, $\frac{1}{10}$ du prix total.	57 ,00
Entretien évalué à $\frac{1}{15}$.	38 ,00
	123f., 50c.

Cette somme, répartie sur 250 journées de travail, donne 0f.,49 par jour. En général, on trouve, d'après cette base, que P étant le prix d'une machine, et N le nombre des jours de travail, les frais journaliers qu'elle occasionne, sont représentés par

$$(0{,}05+0{,}1+\tfrac{1}{15})\frac{P}{N}=0{,}217\frac{P}{N}.$$

Économie dans le prix du transport vertical.

On a vu précédemment qu'en employant une semblable machine, 37m.c.,50 de terre sont élevés, à huit relais verticaux, en une journée de quatre terrassiers, le surveillant compris. Le prix du transport vertical, pour huit relais et 37m.c.,5 de terre, peut donc s'établir ainsi :

4 journées de terrassiers, à 2,fr.90c. .	11f., 60c.	12f.,09c.;
Frais de machine.	0 ,49	

ce qui donne, par mètre cube, 0fr.,322.

Le même travail, exécuté à la brouette, aurait coûté :

16 journées de terrassiers, à $2^{fr.},90^{c.}$, $46^{fr.},40^{c.}$	$48^{fr.},20^{c.}$
Frais de brouette, à raison de $0^{fr.},006$ par mètre cube et par relais, . . . 1, 80	

ce qui donne, par mètre cube, $1^{fr.},285$, et, par conséquent, une économie de $0^{fr.},963$, c'est-à-dire de 75 pour 100, à peu près, du prix du transport à la brouette.

On voit, par le détail ci-dessus, que les frais de machine, comparés à ceux d'entretien des brouettes, présentent une économie qui est presque dans le même rapport que celle qu'on a trouvée pour la main-d'œuvre. Cela tient à ce que le transport, à la machine, emploie quinze brouettes de moins que le transport en rampe.

On remarquera, d'ailleurs, que nous n'avons pas compris, dans le prix du transport à la brouette, les frais résultant de l'emploi des planches de roulage des rampes. D'après des détails qu'il est inutile de consigner ici, ils devraient être portés à $0^{fr.},101$, par mètre cube de terre transportée à huit relais, non compris les échafauds.

Formules relatives à l'emploi de la machine.

Après avoir évalué le prix du transport d'un mètre cube de déblai élevé à huit relais, il reste à donner les moyens de calculer, d'une manière générale, les élémens de ce transport pour une hauteur quelconque. Il suffit, à cet effet, de connaître le temps employé au chargement sur le plateau, à l'ascension et au déchargement des brouettes. Ainsi qu'on l'a dit plus haut, il y a moyennement 24,80 brouettées de terre par mètre cube; ce qui fait $24,80 \times 37,50 = 930$ brouettées élevées dans une journée de dix heures de travail, ou

93 par heure. La vitesse d'ascension étant d'ailleurs d'un mètre, par seconde, lorsque la machine marche convenablement, cela donne, pour la hauteur de 13 mètres à laquelle les ascensions ont été faites, $93 \times 13 = 1209$ secondes, représentant le temps employé aux ascensions pendant une heure, et $3600 - 1209 = 2391$ secondes pour le temps employé aux quatre-vingt-treize chargemens et déchargemens correspondans. Chaque couple de chargement et de déchargement absorbe donc $\frac{2391}{93} = 25'',71$.

Cela posé, si l'on nomme n le nombre des mètres de hauteur à franchir, et x la quantité de brouettées qui devront être montées à cette hauteur, dans une journée de dix heures, on aura, puisque la vitesse d'ascension doit être d'un mètre par seconde,

$$(25'',71 + n)x = 36000''; \quad \text{d'où} \quad x = \frac{36000}{n + 25,71}.$$

Et, comme chaque mètre cube contient 24,8 brouettées, on aura, pour le nombre total M, des mètres cubes, élevés à la hauteur n, dans une journée de dix heures de travail effectif, de la machine,

$$M = \frac{x}{24,8} = \frac{36000}{24,8(n+25,71)} = \frac{9000}{6,2(n+25,71)}.$$

Il reste encore à déterminer la quantité de monteurs qui doivent servir la machine suivant les différentes hauteurs auxquelles la terre est élevée.

On a vu déjà que 930 brouettées, qui ont nécessité 930 ascensions à 13 mètres de hauteur, ont exigé trois monteurs sans tenir compte du surveillant : il en résulte que chaque homme a fait 310 ascensions

à 13^{m},00, ou qu'il s'est élevé à 4030 mètres sur une échelle qui était ici inclinée de 1 de base sur 3 de hauteur, et dont les échelons avaient 0^{m},25 d'écartement, d'axe en axe. Comme ce travail a été répété pendant plusieurs mois, sans que les hommes en aient éprouvé trop de fatigue, il en résulte qu'on peut le prendre, avec confiance, pour base de calcul.

Ayant trouvé, ci-dessus, la valeur x, du nombre des brouettées qui peuvent être montées dans une journée, nx sera la somme totale des hauteurs auxquelles les hommes de l'atelier, devront monter dans une journée, et $\frac{nx}{4030}$ le nombre y, de ces monteurs, qui sera donné par l'expression

$$y = \frac{36000}{4030} \times \frac{n}{n+25,71}.$$

Pour calculer le prix du montage, aux diverses hauteurs, d'après l'analyse qui précède, il suffit de se rappeler que l'on a évalué à $0,217 \times \frac{P}{N}$ les frais de machine par jour; P étant le prix d'une machine, et N le nombre des journées de travail par an.

En désignant, par T, le prix de la journée des terrassiers-monteurs, dont le nombre est y, et se rappelant que l'on doit comprendre le surveillant, $(y+1)T+0,217\frac{P}{N}$ sera la dépense journalière pour élever les M mètres cubes à un mètre de hauteur; enfin,

$$\frac{(y+1)T+0,217\frac{P}{N}}{M}$$

sera le prix du mètre cube élevé à cette hauteur.

Si on le représente par p, et qu'on y substitue, pour γ et M, leurs valeurs ci-dessus, il viendra, toutes réductions faites,

$$p=\frac{24,8nP}{4030}+\frac{62}{9000}(n+25,71)\times\left(T+0,217\frac{P}{N}\right)=0,00685nT+$$
$$+0,0177T+0,00015n\frac{P}{N}+0,00386\frac{P}{N}.$$

Pour le cas de nos expériences, on avait

$$n=13,\ T=2,90,\ P=570^{f.}\ \text{et}\ N=250;$$

d'où $p=0^{f.},282+0^{f.},0903774=0^{f.},3723774$,

valeur égale à celle qui a été trouvée ci-dessus directement.

La valeur du prix du mètre cube de terre élevé à n mètres, se compose, comme on voit, de quatre termes, dont deux qui dépendent de la main-d'œuvre, et deux autres qui ne dépendent que des frais de machine. L'un des premiers reste le même quelle que soit la hauteur n, à laquelle la terre doit être élevée : c'est le terme relatif au chargement et au déchargement, qui, effectivement, ont toujours la même valeur pour toutes les hauteurs, et l'autre dépend du prix de la main-d'œuvre et de la hauteur à laquelle le déblai doit être élevé : c'est le terme qui correspond à l'ascension proprement dite. La même remarque s'applique aux deux derniers termes relatifs aux frais de machine, qui se divisent également, en deux parties distinctes correspondant au chargement et déchargement et à l'ascension.

Au moyen des formules ci-dessus, on a formé le tableau suivant, indiquant les différentes valeurs de M, γ et p, pour des nombres déterminés de relais ver-

ticaux de $1^m,60$; ces résultats sont indispensables à connaître pour prévoir, à l'avance et dans chaque cas, le parti qu'on peut tirer de la machine. On y a joint deux colonnes indiquant les prix du mètre cube *élevé*, à la brouette, sur des rampes pratiquées dans les déblais, sans frais de planches de roulage, et ceux du même transport effectué au bourriquet, à manége, attelé d'un cheval et servi par des terrassiers, d'après les détails contenus dans les *Cahiers d'analyse* qui ont été rédigés, par M. le colonel du génie P. Bergère, pour le service du génie militaire.

On a rapporté, dans la colonne des valeurs de γ, des fractions d'hommes, afin qu'on puisse avoir égard à la qualité des ouvriers dont on dispose, et prendre le nombre entier immédiatement supérieur ou inférieur, selon les cas.

NOMBRE des relais verticaux de $1^m,60$.	HAUTEURS correspondantes n.	VALEURS DE			PRIX DU MÊME TRAVAIL	
		γ nombre de monteurs.	M nombre de mètres cubes par jour.	p prix du mètre cube γ compris le surveillant.	à la brouette en rampe.	au bourriquet à manége.
	m.			f.	f.	f.
2	3 .20	0.99	50.2	0 .125	0 .321	0 .204
4	6 .40	1.78	45.2	0 .189	0 .642	0 .409
6	9 .60	2.63	41.1	0 .254	0 .964	0 .613
8	12 .80	2.97	37.7	0 .319	1 .285	0 .818
10	16 .00	3.43	34.8	0 .383	1 .606	1 .022
12	19 .20	3.82	32.3	0 .448	1 .927	1 .226
14	22 .40	4.16	30.2	0 .512	2 .248	1 .431
16	25 .60	4.46	28.3	0 .557	2 .570	1 .635

On voit, d'après ce tableau, que le transport vertical, à la machine, a constamment l'avantage sur ceux à la brouette et au bourriquet, bien que le dernier soit manœuvré par un cheval, et que la machine proposée n'emploie que des hommes : cette considération

peut être importante pour beaucoup de cas. On voit pareillement que, pour 16 relais ou 25m,60 de hauteur, le prix du transport avec la machine, n'est que le $\frac{1}{5}$ environ de celui qui correspond à la brouette, et le $\frac{1}{3}$ de celui qui est relatif au bourriquet à manége.

Il nous reste deux questions à examiner relativement à l'emplacement à donner aux machines. A quelle distance convient-il de les placer si l'on en a plusieurs pour exécuter un travail déterminé? Dans quelles circonstances convient-il de faire les frais d'un déplacement de machine pour la rapprocher du lieu d'extraction des terres? Ces questions sont on ne peut plus faciles à résoudre; elles tiennent aux rapports des prix des différentes mains-d'œuvre et aux ressources propres à chaque localité. Il suffit de les indiquer pour attirer l'attention, et faire voir qu'on doit tenir compte des circonstances auxquelles elles ont rapport, lorsqu'on a des travaux de ce genre à faire exécuter.

Cas où les terres, après avoir été élevées, doivent être transportées au tombereau.

Dans le cas qui s'est présenté à Vincennes, où la terre, après avoir été élevée à la machine, doit être transportée ensuite à une grande distance horizontale, il y a avantage à faire cette dernière partie du transport au tombereau; ce qui n'offre aucune espèce de difficulté. A cet effet, on établit, devant la machine et à une certaine distance, un pont porté sur quatre poteaux et dont le plancher est percé d'une ouverture rectangulaire : une rampe, en terre ou en planche, raccorde le sol du pont, avec celui du plancher de la machine. Le tombereau se place sous le pont, et les brouettes qui montent la rampe, sont déchargées,

au fur et à mesure de leur arrivée, par l'ouverture, dans le tombereau. Lorsque les localités le permettent, on peut accoler deux machines pour concourir à la charge d'un tombereau, qui reçoit ainsi, dans un temps déterminé, la terre que quatre hommes peuvent charger dans une brouette. Il en résulte une rapidité de chargement qui doit diminuer le prix du transport au tombereau. On peut, par une analyse particulière à chaque cas, et qu'il est superflu d'exposer ici, calculer le nombre de colliers qu'il est convenable d'atteler à chaque tombereau en raison, non-seulement des distances horizontales à parcourir, mais encore du nombre des machines qui fournissent la terre, et de la quantité de cette dernière.

On a pu juger, par les détails qui précèdent, de l'économie considérable qui résultera de l'emploi de la machine proposée, mais, en calculant la quantité d'action développée par chaque homme, et la comparant à l'effet utile, on acquerra une idée plus précise encore de ses avantages.

Quantité d'action développée par les hommes qui manœuvrent la machine.

On a vu ci-dessus que chaque monteur a *élevé son* corps, dans une journée de dix heures, à la hauteur de 4030 mètres : chaque homme pesant moyennement 70^{k}, a donc développé, dans ce temps, une quantité d'action de $4030 \times 70 = 282100$ kilog. élevés à la hauteur de 1^{m}, ou $282100^{k \cdot m}$. C'est, à très-peu près, la valeur admise, par M. Navier, dans un tableau inséré au tome I^er^. de la nouvelle édition de l'*Architecture hydraulique de Bélidor*, pag. 396, avec cette différence pourtant, qu'il suppose que l'homme élève son corps en montant une rampe douce ou un escalier, tandis qu'ici il a gravi une échelle, ce qui est plus défavorable.

Les trois monteurs ont donc développé une quantité d'action journalière de $3 \times 282100^{k.m} = 846{,}300^{k.m}$.

Quant à la part d'action développée par le surveillant, il est plus difficile de l'évaluer exactement : elle est employée à vaincre les résistances passives de la machine, que des expériences directes ont montré devoir correspondre à un effort moyen de $5^k{,}00$, et aussi à surmonter l'excès $2^k{,}50$, du poids moyen d'une brouette pleine sur celui d'un homme. Cela donne, pour les 930 ascensions des plateaux à 13^m, une quantité d'action journalière de $7^k{,}50 \times 930 \times 13^m = 90675^{k.m}$ environ. En ajoutant ce résultat à celui qui est fourni par les monteurs, on a une quantité d'action totale de $936975^{k.m}$, appliquée à la machine. Son effet utile absolu est mesuré par le poids de la terre élevée, en un jour, à la hauteur de 13^m ; le poids du mètre cube étant de 1800^k, on a, pour la valeur de cet effet ; $13^m \times 37^{m.c.},5 \times 1800^k = 886860^{k.m}$. En le comparant à la quantité d'action développée, on trouve qu'il en est les $\frac{886860}{936975} = 0{,}946$, ou environ les $\frac{17}{18}$; résultat dû évidemment à la grande simplicité de la machine.

Nous devons faire observer, avant de terminer ce qui est relatif à la mesure de l'effet utile de cette machine, que l'on a choisi les meilleurs ateliers pour recueillir les données de la discussion précédente, c'est-à-dire ceux composés d'ouvriers forts et habiles, et que, sur 28 ateliers marchant à la fois, 4 ou 5 seulement ont offert des résultats aussi avantageux. Les autres, composés de petits manœuvres et de malheureux qui n'avaient pas l'habitude des travaux, ont

offert des résultats qui ont varié entre les deux tiers et les trois quarts des précédens.

Usages divers. L'emploi de la machine qui fait l'objet de cette notice ne se borne pas au transport vertical des terres, elle est susceptible encore d'être utilisée, avec le plus grand avantage, pour le montage des autres matériaux. Une partie des moellons et mortiers employés dans les constructions qui viennent d'être exécutées au château de Vincennes, a été élevée au moyen de machines semblables; seulement, au lieu d'être portées en encorbellement, elles sont montées sur un échafaud composé de quatre plats-bords, en sapin, de 14^{m} de haut, sur 0^{m},35 et 0^{m},10 d'équarrissage, reliés par des croix de Saint-André. Leur plancher est fixé à la hauteur relative au degré d'avancement de la construction, et, en passant des rouleaux sous le patin qui supporte l'échafaud, on peut le transporter, sans le démonter, là où le besoin s'en fait sentir.

Le montage des pierres, a eu lieu d'une manière analogue, toutes les fois qu'elles n'ont pas exigé plus de 6 ou 7 hommes pour former contre-poids.

On peut obtenir une économie plus grande que celles dont il vient d'être question, quand les matériaux à descendre, peuvent servir de contre-poids à des déblais qu'on doit élever : c'est ce qui est arrivé à Vincennes, où 1200 mètres cubes de pierres meulières ont élevé, à 10^{m} de hauteur, un poids égal au leur propre, de pierres de démolition ou de terre, sans autre main-d'œuvre que celle du surveillant.

Enfin le même principe est susceptible d'être appliqué avantageusement, et moyennant des modifications sur lesquelles il est inutile d'insister, à diverses

autres circonstances, telles que l'élévation des matériaux à travers les cages d'escalier, le battage des pilots, les épuisemens, les exploitations de carrières et de mines, etc.

LÉGENDE DE LA PL. V.

(Les mêmes lettres représentent les mêmes objets dans toutes les figures.)

aa, roue à gorge, ou poulie, traversée par un axe tourné, en fer;
bb, supports de tourillons présentant le bois debout au frottement;
cc, moise pour supporter la roue et relier entre eux les poteaux *dd*;
dd, poteaux avec leurs liens;
ee, plancher au niveau duquel arrivent les matériaux;
ff, garde-corps au pourtour du plancher;
gg, câble de $0^m,025$ (11 lignes), destiné à supporter les plateaux;
h, étrier avec boulon et écrou, pour compenser les variations de longueur du câble, dans les premiers instans du service;
il, plateaux sur lesquels se fait le transport vertical des matériaux;
k, *k*, cordages de $0^m,016$ (7 lignes), pour la suspension des plateaux;
l, *l*, arcs en fer ou en bois, pour maintenir l'écartement des cordages et faciliter le passage des rouleurs;
m, *m*, ressorts en acier, à mentonnets en fer, avec manches en bois, pour supporter les plateaux à leur arrivée au niveau du plancher supérieur;
nn, potelets, porte-ressorts, assemblés dans les solives du plancher;
oo, contre-fiches pour soutenir le surplomb du plancher;
p, *p*, flèches avec potelets pour retenir le plancher;
q, *q*, tourniquet à bascule, à lentille en plomb, destiné à retenir le plateau inférieur, non encore chargé.

Nota. Lorsque le rouleur a chargé ce plateau, il fait faire une demi-révolution au tourniquet, sur son axe, de manière à lui faire prendre la position $q'q'$ (Elévation de face, suivant la ligne AB du plan), dans laquelle il sert à arrêter le second plateau, lorsqu'il est descendu avec le rouleur et sa brouette vide.

Cette disposition permet, à ce dernier, de sortir du plateau avec sa brouette, aussitôt qu'il s'est assuré que le bec de la bascule, abaissée d'abord en $q''q''$ (Coupe suivant la ligne CD du plan), a échappé au plateau descendant, pour passer par dessus.

rr, tringles conductrices des plateaux, taraudées par les extrémités;

s, *s*, écroux à oreilles pour régler et tendre les tringles;

tt, pièces de bois dans lesquelles sont fixées ces mêmes tringles;

u, *u*, mentonnets à repos, renversés, placés sur le côté du plateau, vis-à-vis des mentonnets à ressort *m*, pour supporter ce plateau lorsqu'il a échappé au dessus de ces mentonnets.

v, *v*, entailles, dans les extrémités du cadre du plateau, qui répondent à d'autres pratiquées aux solives du plancher supérieur;

x, *x*, oreilles en fer, pour attacher les cordes des plateaux et consolider les extrémités du cadre;

y, *y*, prisonniers pour retenir le plateau le long de la tringle conductrice, et l'empêcher de prendre un mouvement giratoir;

z z, échelle servant au rouleur, qui est descendu avec sa brouette vide, pour remonter sur le plancher supérieur;

&, rouleur qui est descendu avec une brouette vide, en faisant contre-poids à une brouette pleine;

w, rouleur qui, après être remonté à l'échelle, va enlever la brouette pleine qui vient d'arriver;

x', rouleur qui remonte à l'échelle;

y', surveillant qui fait les commandemens et donne l'impulsion au départ, accélère ou modère ensuite le mouvement;

z', *z'*, entailles dans la solive du plancher supérieur, pour retenir le plateau au moyen de ses propres entailles *v*;

v', gant en cuir pour garantir les mains du surveillant;

w'w', tasseaux pour empêcher le câble de sortir de la gorge de la roue;

&'&', étriers pour retenir le câble dans le cas où il sortirait de la gorge de la roue.

NOTICE

SUR LA CONSTRUCTION

DU SAS SAINT-PAUL,

EXÉCUTÉ A BESANÇON, EN 1829 ET 1830;

Par M. A. J. B. A. SIMON, Capitaine du Génie.

Le sas *Saint-Paul* a $47^{m},90$ de longueur; sa largeur, entre les bajoyers, est de $5^{m},30$ et sa chute de $2^{m},20$. La hauteur des bajoyers au-dessus du radier, est de $6^{m},00$. La construction, qui a employé deux campagnes, a offert d'assez grandes difficultés, tenant à sa position obligée, à la hauteur des eaux et à la profondeur à laquelle il fallait descendre le plan des fondations. On verra, en outre, qu'elle est loin d'avoir été favorisée par la saison.

Les plans et le profil (*Fig.* 1, 2, 3, *Pl. VI*) de ce sas, montrent qu'il est resserré entre le revêtement de la courtine et le mur de gorge du bastion Saint-Paul, de telle sorte, que le parement intérieur des profils des bajoyers, ne se trouve qu'à $0^{m},50$ de distance des

pilots de fondation de ces deux murs ; qu'en outre, le plan des fondations, coté 278,08, devait descendre à $3^{m},60$ en contre-bas du grillage de cette courtine, cotée 274,40, et que la hauteur des eaux basses, au-dessus de ce plan, était de $3^{m},40$.

L'aire générale de la fondation, dont la surface est de 625 mètres carrés, a été formée d'une couche de béton d'un mètre d'épaisseur. Ce béton a été coulé d'une manière simple et expéditive, et a donné un résultat des plus satisfaisans. Les batardeaux ordinaires d'enceinte ont été remplacés, en grande partie, par des bourrelets en béton, qui font corps avec la maçonnerie des bajoyers, et qui paraissent devoir être substitués avec avantage, à ces batardeaux, dans un grand nombre de constructions hydrauliques.

Nous diviserons le travail en trois époques : 1°. la fouille des fondations ; 2°. l'immersion du béton du radier général et celle des bourrelets, 3°. la construction des maçonneries.

PREMIÈRE ÉPOQUE. — *Fouille des fondations.*

La démolition de l'ancien moulin *Saint-Paul*, situé entre la courtine et le mur de gorge du bastion de ce nom, avait été exécutée en 1828, et le déblai avait été poussé jusqu'à la cote 275,40 ; c'est-à-dire, à 1 mètre en contre-bas du grillage de la courtine. D'après le projet, le pied de la courtine et du mur de gorge devait être garanti par une file de palplanches jointives, soutenues par un rang de pilots et reliées par des moises arc-boutées, d'une file à l'autre, au moyen de forts tirans (*voy. Fig.* 2, 3, 4) ; mais, dans l'exécution,

l'enfoncement des palplanches, qu'on ne put guères faire descendre plus bas que le plan des fondations, éprouva tant de résistance par la ténacité du sol, qu'on crut pouvoir supprimer les pilots. Cet encaissement était terminé dès le 18 février, mais le mauvais temps et la hauteur des eaux ne permirent point de commencer la fouille avant le 13 mai 1829, époque où les eaux d'aval étaient encore à la cote 274,40.

La première opération à faire était d'extraire environ 255 pilots, restant des anciennes fondations; à cet effet, on commença les épuisemens, et, après avoir enlevé une couche de marne mêlée de sable, de 0,30 d'épaisseur, on parvint à arracher ces pilots, d'environ 2^{m},00 de fiche, avec des abatages. On remarquera que chaque trou de pilot fournissait une petite source, ainsi que cela devait arriver, d'après un puits d'essai creusé en 1828. Ce puits nous avait indiqué qu'à la cote 275,70, commençaient des couches de sable fin, très-perméable, quoique durcissant à mesure que l'on descendait, et mêlé de débris de briques, de poteries et de pierres de toutes dimensions. Ce puits n'avait pu être poussé plus bas que la cote 277.

Le niveau des eaux, en amont de l'ancien barrage *Saint-Paul* (*voy. Fig.* 1re.), dont notre fouille se trouvait éloignée de 60 mètres, était alors à 4^{m},8 au-dessus du plan des fondations, et celui des eaux d'aval, dans le chenal de navigation, distant de 50^{m},00, se trouvait à 3^{m},60 au-dessus de ce même plan. De pareilles pressions d'eau et la nature du sol ne nous permettaient pas d'espérer pouvoir exécuter, par épuisement, même une portion de la fouille, surtout avec les faibles moyens qui étaient à notre disposition; il fal-

lait donc avoir recours à la drague ; mais, comme la plus grande difficulté du draguage consistait à atteindre le fond, et que cette opération ne pouvait qu'être très-lente sous une profondeur d'eau de $3^{m},40$, on se décida, afin de gagner du temps, à creuser une rigole, à fond, d'environ 2 mètres de large, en essayant de baisser le niveau, au moyen des épuisemens, de manière à n'avoir plus à draguer qu'à $1^{m},00$ de hauteur sous l'eau.

Les machines que nous avions à notre disposition étaient quatre pompes, en bois, mues chacune par quatre hommes, et deux pompes, dites *Arnollet*, mues chacune par dix hommes : nous ne dirons rien de ces dernières, sinon que nous n'en conseillons pas l'usage, attendu qu'elles sont sujettes à de si fréquentes réparations, et d'un produit si incertain, qu'il vaudra toujours mieux se servir de chapelets et de vis d'Archimède.

On partagea la fouille en deux parties, au moyen d'un batardeau en terre grasse, de 1 mètre d'épaisseur, et, le 22 mai, les épuisemens et le draguage commencèrent par la partie d'aval. Quoique les eaux d'amont se maintinssent à un niveau plus élevé que celles d'aval, elles étaient cependant en communication par la portion du sol située au-dessous du batardeau. Aussi nous fut-il impossible de creuser la rigole, de manière à la rapprocher de plus de $0^{m},50$ du plan de la fondation. Malgré la réduction de hauteur du niveau de l'eau, la ténacité du sol et les grosses pierres dont il était rempli, présentaient encore de grandes difficultés au draguage : arrivé à la cote 277,10, on était obligé d'extraire de gros

fragmens de *roche poudingue*, ou agrégation de cailloux roulés, cimentés avec du sable, appelée, dans le pays, *ganneleu*. Cette couche paraissait avoir de $0^m,28$ à $0^m,30$ d'épaisseur; plus bas, on retrouvait le sable fin, et il fallait renoncer aux épuisemens. La rigole n'a été terminée, dans toute la longueur de la fouille, que le 17 juin, et les journées d'épuisemens, tant de nuit que de jour, montèrent, à cette époque, à 2200. Cette dépense augmenta, sans doute, celle du draguage, mais on gagna du temps, et on n'eut pas lieu de s'en repentir par la suite; car les crues d'eau devinrent si fréquentes, dès le commencement de septembre, qu'il fut impossible de terminer les bourrelets en béton, avant le 13 décembre suivant, ainsi qu'on le verra plus bas.

Le batardeau en marne, qui séparait les deux parties de la fouille, ayant été enlevé, on établit une ligne de dragueurs sur toute son étendue. Les tirans servant d'arcs-boutans au coffrage en palplanches, tinrent aussi lieu d'échafaudages; mais il était impossible d'établir plus d'une ligne de dragueurs, parce qu'on ne pouvait évacuer les déblais que du côté de la plate-forme du bastion. Cette opération du draguage a été longue et difficile, tant à cause de la profondeur d'eau, $3^m,40$, que de la ténacité du sol.

Pour vaincre cette dernière, on s'est servi de la lance, du crochet et de la charrue, représentés par les *Fig.* 9, 10 et 12. La lance est manœuvrée verticalement par un seul homme; elle sert à rompre les gros fragmens; le crochet et la charrue servent à diviser le gravier trop compact, et aussi à sortir de l'eau, les grosses pierres; ils sont manœuvrés, le pre-

mier, par quatre hommes, la charrue par dix et même par douze hommes. Pour faire mordre la drague, on est, en outre, obligé de faire peser sur la douille, une fourchette (*Fig.* 11), emmanchée au bout d'une longue gaffe; cette fourchette est maniée par un petit manœuvre qui sert alternativement deux dragueurs : on employait une lance pour trois de ceux-ci.

Malgré ces aides, un dragueur n'extrayait guères qu'un tiers de mètre cube par jour; et, comme il fallait d'ailleurs faire jouer souvent le crochet et la charrue, le cube de draguage, dans la partie la plus difficile, nous a coûté jusqu'à quatre journées et demie de manœuvre; tandis que, dans un terrain ordinaire, et sous 2 mètres de profondeur d'eau, un dragueur peut extraire facilement jusqu'à 1 mètre cube. L'atelier étant ici très-resserré, et ne pouvant employer plus de quarante-cinq dragueurs à la fois, la fouille n'a été entièrement terminée que le 8 juillet; on en avait alors extrait 1377 mètres cubes, et l'on était parvenu à en rendre le fond assez uni pour que les plus grandes inégalités n'excédassent pas $0^m,10$ à $0^m,15$. Aussitôt après, on enfonça les pilots du batardeau d'enceinte, vers l'aval.

. . . . . .

DEUXIÈME ÉPOQUE. — *Immersion du béton du radier général et des bourrelets.*

. . . . . .

On s'est servi, pour le béton, de deux espèces de chaux : l'une provenant des carrières de *More*, l'autre de rognons recueillis dans le vallon des *Chaperais*; comme elles étaient peu énergiques, on y a fait en-

trer une petite partie de ciment. D'après plusieurs essais faits précédemment, on s'est arrêté aux proportions suivantes :

Pour 0,500 mèt. cube	Chaux vive. .	$0^{mc},125$.
	Gros sable. . .	0 ,250.
	Ciment. . . .	0 ,040.
	Eclats.	0 ,085.

On mettait peu d'éclats de pierres, parce que le sable du Doubs, dont nous nous servions, n'était point passé à la claie, et contenait, par lui-même, beaucoup de petites pierres. Un demi-mètre cube de mélange, nous donnait la même quantité de béton; il se fabriquait par tas de $0^{mc},500$, sur des aires en madriers jointifs; chaque tas était corroyé, pendant une heure, par cinq hommes armés de rabots en fer.

Quatre ateliers de broyeurs exigeaient, en outre, six pelleteurs pour relever les matières, cinq hommes pour préparer les tas, arroser et fuser la chaux, deux hommes pour le mesurage, et deux autres pour alimenter en éclats. Il faut observer que toutes les matières étaient à pied-d'œuvre.

Ces quatre ateliers confectionnaient 20^{mc} de béton, en un jour de dix heures de travail effectif; ce qui fait revenir la main-d'œuvre du mètre cube, à une journée et trois quarts. Cette fabrication s'est faite constamment à découvert; nous avions seulement un petit hangar pour le dépôt journalier de la chaux et du ciment.

Pour immerger le béton, on essaya d'abord de se servir d'une trémie sans fond, de 1 mètre de côté, et dont l'extrémité inférieure était à 1 mètre du fond de

la fouille; mais on ne tarda pas à y renoncer dès qu'on eut reconnu qu'on ne pouvait y couler que de petites masses à la fois, et que cette trémie était difficile à déplacer. On lui substitua une caisse à bascule (*Fig.* 13), et qui se meut sur un pivot en bois, qu'on arrête, au moyen de trois taquets, quand on veut la charger. On coulait, par son moyen, un demi-mètre cube à la fois, et il suffisait d'un homme assisté de quatre manœuvres, pour la diriger. De cette manière, le béton se délavait moins qu'avec la trémie, et l'on changeait aisément la caisse de place; avec une de ces bascules, on coulait facilement 20 mètres cubes par jour. Le béton était transporté à la brouette par les quatre aides, et, pendant ce temps, l'homme qui dirigeait, pressait légèrement la surface du béton déjà immergé, avec une dame plate, pour le réduire à la hauteur voulue. Ainsi, l'immersion d'un mètre cube de béton, coûtait un quart de journée de manœuvre.

Si la petitesse de l'atelier et l'insuffisance des fours à chaux n'avaient pas empêché d'en confectionner une plus grande quantité à la fois, une bascule *eût pu* en couler de 25 à 30 mètres cubes. On faisait agir simultanément deux de ces bascules, qui, après être parties respectivement de l'aval et de l'amont, marchaient à la rencontre l'une de l'autre, de manière que les deux couches de béton immergé, chassaient devant elles, les vases provenant, soit du délavage du béton, soit des parties terreuses ou sableuses très-ténues, qui, suspendues dans l'eau pendant le draguage, s'étaient ensuite déposées au fond de la fouille. Il était très-important d'enlever ces vases; car si elles se fussent mêlées avec le béton, elles eussent nui à son

durcissement. Aussi, a-t-on, à partir du 27 juillet, douze jours après le commencement de l'immersion, employé constamment au moins douze manœuvres au draguage, qui a coûté cent quatre-vingts journées jusqu'à son entier achèvement.

C'est au soin particulier qui a été mis à cette opération, que nous croyons devoir attribuer la bonne qualité du béton employé, plutôt qu'à celle de la chaux elle-même. Nous pensons aussi que pour mieux atteindre ce but : d'éviter le mélange de la vase avec le béton, il est préférable de donner, de suite, à la couche de béton, toute son épaisseur, et non de le couler par couches générales superposées, de $0^{m},30$ d'épaisseur, ainsi que cela se pratique ordinairement; il est probable, en effet, que si l'on a obtenu de bons résultats par l'emploi de cette dernière méthode, on en a été principalement redevable à l'excellente qualité de la chaux.

On a coulé, pour le radier général, y compris le mur de chute, 809^{mc} de béton; il est facile de calculer, d'après les données d'expériences ci-dessus, que l'opération eût pu être terminée en vingt jours; mais nos fours à chaux n'ayant point suffi à la consommation, nous avons été obligés de ralentir la fabrication du béton, et l'opération n'a pu être terminée que le 18 août, c'est-à-dire au bout de trente-deux jours de travail. Déjà, à cette époque, les parties immergées les premières, avaient acquis assez de consistance pour résister au choc d'une perche ferrée.

Le peu d'espace qui restait entre la ligne des palplanches et le profil des maçonneries des bajoyers, ne permettant pas d'établir des batardeaux d'enceinte,

sur les deux côtés, on s'était décidé, d'après les renseignemens recueillis sur l'emploi de bourrelets en béton, dans plusieurs constructions hydrauliques du même genre, à s'en servir au lieu de batardeaux; les couches de sable perméable commençant à la cote 275,70, il était nécessaire d'élever ces bourrelets à la cote 275,30; ce qui leur donnait, au-dessus du radier, 1^{m},80 de hauteur. Leur épaisseur, au sommet, a été fixée à 1^{m}; les panneaux destinés à les contenir, devaient recevoir très-peu de talus; mais, comme ils fléchirent un peu par la poussée du béton, après l'exécution, ces bourrelets avaient moyennement 1^{m},50 d'épaisseur à la base; l'expérience a appris qu'on eût pu diminuer ces dimensions.

Au sas de prise d'eau, dans le Rhin, de la branche canalisée d'Huningue, construction décrite par M. Beaudemoulin, ingénieur des ponts et chaussées, dans un mémoire intitulé : *Recherches théoriques et pratiques sur la fondation par immersion, des ouvrages hydrauliques*, mais dont on n'avait pas encore connaissance alors, on a donné, aux bourrelets, 0^{m},60 d'épaisseur au sommet, et 3 mètres à la base, sous une hauteur d'eau de 4^{m},50.

Pour former l'encaissement de nos bourrelets, nous nous sommes servis de panneaux en planches, de 0,027 d'épaisseur, cloués sur des montans en bois de chevrons. Ces montans étaient armés, à leur extrémité inférieure, d'un petit sabot en fer, pour les faire pénétrer de 0^{m},16 dans le béton du radier; leur extrémité supérieure était fixée, au moyen de petites chaînes ou de cordes, à une moise horizontale reposant sur les arcs-boutans du coffrage en palplanches (voyez *Fig.* 3).

Ces panneaux se posaient assez vite, puisqu'il n'a fallu que quinze journées de charpentier et trente de manœuvre, pour un développement de 78^{m},0, mais ils n'offraient pas toute la solidité nécessaire pour résister à la poussée du béton, et surtout ils étaient sujets à être soulevés par une crue d'eau. On pense qu'il serait préférable, comme cela s'est fait au sas d'Huningue, de former l'encaissement par un vannage soutenu, du côté intérieur, par des pilots espacés de 1 mèt. et couronnés par un chapeau, et, du côté intérieur, par des fermes en bois, de 0^{m},20 d'équarrissage, espacées de 2 mèt. et formées de deux contrefiches inclinées, qui, reliées par un entrait, seraient assemblées dans le chapeau des pilots.

Dès le 20 août, on commença à remplir les encaissemens au moyen d'une trémie; une gaffe attachée à un anneau fixé à l'extrémité inférieure de cette trémie, permettait de sortir celle-ci de l'eau, pour la remplir à sec, et de l'y replonger pour faire couler le béton en masse, mais elle ne pouvait recevoir plus de $\frac{1}{7}$ de mètre cube. Le 28 août, le travail fut interrompu par une crue d'eau, qui se soutint tellement, qu'il fut impossible de le reprendre avant le 27 octobre.

Pendant ces crues, nos panneaux furent soulevés en partie, et lorsqu'on les reposa, il fut impossible de leur donner la même solidité qu'auparavant, les trous des sabots ayant été trop élargis. Cela eut aussi, par la suite, un résultat très-fâcheux : ce fut le soulèvement des deux arcs-boutans d'aval du coffrage, qui entraîna celui des deux pilots auxquels ils étaient fixés, à l'endroit où le sas se rattache au flanc gauche du bastion.

Ces arcs-boutans étaient maintenus, ainsi qu'on le voit *Fig.* 3 et 4, par des moises horizontales, qu'un pressant besoin de pièces de sapin pour les ponts de draguage, avaient fait enlever peu de jours avant la première crue, comptant que, dans la saison encore peu avancée où l'on se trouvait, on aurait tout le temps de les remplacer.

Le 30 octobre, on reposa les panneaux, et, après avoir préalablement dragué la vase qui s'était déposée au fond, du 6 au 20 novembre, on reprit le travail des bourrelets. Cette opération, après une nouvelle interruption de seize jours, causée par le mauvais temps, fut continuée le 7 décembre et terminée le 13. Plusieurs des panneaux ayant cédé, lors de l'immersion du béton, quelques mètres cubes ont coulé au dehors, et les bourrelets prirent, dans ces parties, un renflement qu'on fut obligé d'enlever par la suite.

Le nombre de mètres cubes de béton immergé pour les bourrelets, a été de 250, et le coulage de chaque mètre cube a coûté 0,80 de journée de manœuvre. On a remarqué que ce béton avait durci plus vite que celui du radier : au bout de huit jours, il résistait au choc de la perche ferrée.

TROISIÈME ÉPOQUE. — *Construction des maçonneries.*

L'aire, en béton, de la fondation du flanc gauche du bastion *Saint-Paul*, avait été coulée dans l'intervalle compris entre les premiers jours d'avril et le 15 mai 1830, en commençant par la partie qui se raccordait avec le radier du sas, et qui devait supporter le batardeau de séparation. Au 25 mai, les eaux

étant à la cote 274.40, on s'occupa de ce batardeau et de celui d'enceinte, à l'aval du sas (*voy. Fig.* 5); tout étant préparé, le 31 mai, on commença à épuiser avec deux chapelets mus chacun par douze hommes, relevés par deux relais. Vers le soir, les eaux n'ayant plus que $1^{m},00$ de hauteur, on put les soutenir ainsi avec un seul chapelet, et l'on entama la construction du batardeau du flanc; au jour, il fut continué, et on s'occupa de celui d'enceinte, en aval : ce dernier travail fut, à tort, mais dans l'intention d'aller plus vite et de ménager les épuisemens, continué dans la nuit du 1^er^ au 2 juin; comme on était très-gêné par les échafaudages des chapelets, les terres furent mal damées, et il en résulta, plus tard, des filtrations équivalentes, à peu près, aux trois quarts du produit d'un chapelet.

Le 2, au matin, le radier fut mis à sec, sauf une couche de vase, d'environ 30 à 40 centimètres de hauteur, provenant des dépôts laissés par les crues, et de la chaux abandonnée lors du coulage du béton et des bourrelets. On s'occupa aussitôt de brouiller cette vase avec des rabots en bois, maniés par des hommes descendus sur le radier, afin de la faire enlever par les chapelets; et la surface du radier ayant été un peu nettoyée, on s'assura que le béton en était très-dur, et ne présentait aucune filtration; mais on reconnut qu'il existait, aux deux pilots du batardeau du flanc, désignés par les lettres *a* et *b* (*Fig.* 2 et 4), deux sources dont le produit pouvait être estimé à celui d'un chapelet bien servi. Ces deux pilots étaient déversés, et avaient été soulevés, ainsi qu'on l'a remarqué plus haut, par les tirans qu'ils supportaient, par

dant les crues de l'automne précédent. En sondant avant les épuisemens, on avait reconnu le vide autour du pilot *a*, et on avait essayé de le remplir en y coulant du ciment de Pouilly; l'expérience a montré que ce remède avait été infructueux. Quant au second pilot, le sondage ne nous avait rien indiqué, soit par la manière dont il était déversé, soit à cause de la vase qui remplissait le trou.

En outre de ces deux sources, nous avions celle dont la cause a déjà été signalée, au batardeau d'aval, et les deux chapelets avaient fort à faire. Nous avons remarqué qu'autour de tous les autres pilots d'enceinte, dont la position n'avait pas varié, il n'existait aucune espèce de filtrations, et que le béton adhérait parfaitement au bois. Les sources des deux premiers pilots ayant été mises bien à découvert, on essaya de les arrêter en coulant, dans les trous, environ 650 kilogrammes de ciment de Pouilly; mais on n'obtint d'autre résultat que de les diviser en plusieurs petits jets, et nous croyons qu'en pareille circonstance, il devient superflu de chercher à les faire tarir : heureusement que ces sources se trouvaient ici en dehors de la maçonnerie.

Les bourrelets ne manifestaient non plus aucune source; cependant quelques parties qu'on enleva plus tard, offraient peu de consistance, soit à cause de la qualité médiocre de la chaux, soit à cause des interruptions répétées qui avaient eu lieu pendant l'immersion; d'autres parties des bourrelets étaient tellement dures qu'on ne pouvait les entamer qu'avec les outils de tailleurs de pierre, quoiqu'elles fussent visiblement imprégnées d'eau jusqu'au sommet : un

petit cube de $0^{m},008$, détaché de ces bourrelets et qui pesait alors 20 kilogrammes, ne pesa plus, en effet, que $18^{kilog.},50$, après qu'il eut été séché. Il en était de même du béton du radier : à mesure qu'on l'écrêtait pour la pose des coussinets et des pavés, il se produisait de petites filtrations qui finirent par occuper presqu'un chapelet.

La surface du radier ayant été bien nettoyée de la vase qui la couvrait, on reconnut, par le nivellement, qu'elle ne présentait pas d'inégalités plus fortes que $0^{m},10$, et qu'il existait une pente de l'amont à l'aval. On fut obligé de l'écrêter ou *araser* pour la pose des coussinets, parce qu'on l'avait tenue un peu trop haute, dans la crainte qu'elle n'acquît pas la même dureté qu'à l'intérieur; mais, dans le fait, on ne s'est aperçu d'aucune différence à cet égard.

Le 9 juin, le mur de chute était fondé ; mais les interruptions causées par les réparations des chapelets, et l'appréhension d'une crue qui augmenterait l'abondance des sources, nous faisant craindre l'insuffisance de ces deux chapelets, nous nous décidâmes, d'après la remarque que toutes les voies d'eau venaient de la chambre d'aval, à séparer celle-ci du sas proprement dit, au moyen d'un petit batardeau en terre grasse, formé de deux rangs de poutrelles, et appuyé contre l'angle d'amont de cette chambre (*voy. Fig.* 5). Ce batardeau ayant été posé dès que les trois premières assises de la partie d'amont furent élevées, on ne craignit plus de laisser monter les eaux à $1^{m},50$ dans la chambre d'aval.

Un seul chapelet pouvait facilement les maintenir à cette hauteur, et une petite pompe, en bois, mue

par quatre hommes placés sur le batardeau ci-dessus, suffit pour l'évacuation des eaux de filtration provenant de l'arasement qu'on avait fait subir à la partie d'amont. On espérait aussi, en faisant cette séparation, pouvoir, au moyen de nouveaux bourrelets de béton, de $1^{m},00$ d'épaisseur et autant de hauteur, coulés autour de l'enceinte des batardeaux d'aval, parvenir à étancher les sources; mais plus tard, lorsqu'on enleva le batardeau en poutrelles ci-dessus, on s'aperçut que ces bourrelets n'avaient pris que très-peu de consistance, même au bout de 40 jours d'immersion, et l'on fut obligé de les enlever; il est probable que les sources délavaient le béton à mesure qu'on le coulait; ce qui confirma dans l'opinion de l'impossibilité de les étancher.

Une crue de 1 mètre, qui eut lieu du 13 au 17 juin, nous força de relever d'autant nos batardeaux du flanc et d'aval; le 22, la cinquième assise de la partie d'amont était posée, et nous avions enlevé le batardeau de séparation d'avec la chambre d'aval; mais, à une heure de l'après-midi, les eaux ayant commencé à croître, de nouveau, de huit centimètres et demi par heure, il devenait impossible de hausser suffisamment les batardeaux, pour suivre leur mouvement; on dut donc se décider à les laisser monter, et à suspendre le travail. La crue s'arrêta le 24 : elle avait été de 2 mètres en 36 heures; plusieurs oscillations se succédèrent dans le niveau des eaux, et ce n'est que le 14 juillet qu'on put reprendre les maçonneries avec sécurité.

On fut alors obligé d'employer, de nouveau, deux chapelets, servis chacun par trois relais de douze

hommes; les sources de la chambre d'aval avaient diminué, mais les filtrations provenant de l'arasement du béton, pour la pose du pavé du radier, étaient plus abondantes: cet arasement avait été fait d'une pièce; l'expérience a montré qu'il eût été préférable de l'exécuter, au fur et à mesure de la pose du pavé.

Le 26, cette pose étant achevée, ainsi que celle des deux premières assises de la chambre d'aval, on put laisser monter les eaux, de manière à n'avoir plus besoin que d'un seul chapelet, et le 30, les maçonneries se trouvant à hauteur des basses eaux, les épuisemens cessèrent totalement. Le 11 août, la 7^me^. assise, élevée de 4^m^,40 au-dessus du radier d'aval, était posée, et l'on s'arrêta faute de fonds.

Les bourrelets, ainsi que le montre le profil de la *Fig.* 3, ont été parfaitement reliés à la maçonnerie, en moellons, des bajoyers, et, depuis lors, on ne s'est aperçu d'aucun tassement.

NOTE

SUR L'ASSAINISSEMENT DES LATRINES

DE CASERNES.

M. le lieutenant général de Fleury, a fait employer, avec beaucoup de succès, dans les établissemens militaires de Lyon, le moyen indiqué par M. d'Arcet, pour garantir complètement les habitations de l'infection et de l'insalubrité produites par le voisinage forcé des latrines. Ce moyen consiste, comme on sait, dans l'application de la ventilation par l'échauffement de l'air dans une cheminée d'appel communiquant avec la fosse.

Les cuisines des soldats qui sont, comme les latrines, un accessoire obligé de toute caserne, offrent naturellement le moyen de produire cette ventilation d'une manière simple et facile. Il suffit d'accoler ces cuisines aux latrines, et de faire communiquer la fosse de celles-ci, avec la cheminée des fourneaux, par un conduit d'une dimension suffisante. L'air échauffé de la cheminée, produira un courant qui sera alimenté, en partie, par le tirage des foyers, et, en partie, par les gaz de la fosse des latrines. L'expérience a prouvé que la ventilation, ainsi produite, était suffisante pour entraîner tous ces gaz par la cheminée, de manière qu'il ne s'en dégage point par les ouvertures mêmes

des latrines. On a rempli parfaitement ce but dans toutes les casernes de Lyon, en faisant usage de la règle qui consiste à *donner au tuyau d'appel, une ouverture égale à la somme de toutes les ouvertures des sièges qu'on a à désinfecter par ce tuyau* (*).

Les figures 1, 2 et 3 de la Pl. VII, donnent le plan et les coupes des cuisines et latrines accolées, pour un bataillon, suivant la disposition adoptée au fort *Lamotte* (**). On peut aussi placer les huit marmites, de file, contre le mur de séparation des latrines et des cuisines, comme cela a été fait dans d'autres forts. Cette dernière disposition est toujours la plus convenable pour les établissemens destinés à un petit nombre de compagnies. Le plus petit de ces établissemens, exécuté à Lyon pour deux compagnies, est celui dont le plan se trouve indiqué *Fig.* 4.

Les figures 5, 6 et 7 donnent les détails des latrines. On a réduit la largeur du local qui leur est destiné, au minimum 2 mètres; ce qui contribue beaucoup à la propreté. Le sol en est formé par de grandes pierres ou dalles de $0^{m},30$ d'épaisseur, qui couvrent tout l'espace de la fosse, au-dessus de l'emplacement des latrines, et dont le nettoiement se fait avec la plus grande facilité, au moyen de quelques seaux

---

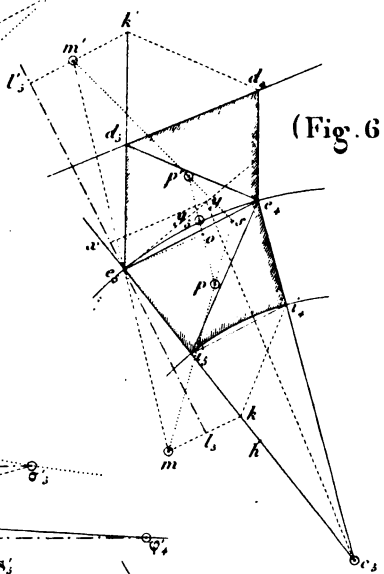
(*) Voyez *l'Instruction publiée par le Conseil de salubrité, sur l'assainissement des latrines et des fosses d'aisance.* Paris, Bachelier, 1825.

(**) Au fort *Lamotte*, la fosse est plus grande, et la voûte se prolonge sous tout le bâtiment. Celle qui est indiquée au dessin paraît suffisante; car, en la supposant remplie jusqu'à la naissance de la voûte, elle peut contenir $6^{mc},426$. Or 800 hommes, en comptant $\frac{4}{10}$ de litre par homme et par jour, donneraient, pour 6 mois, un volume total de $5^{mc},760$ seulement.

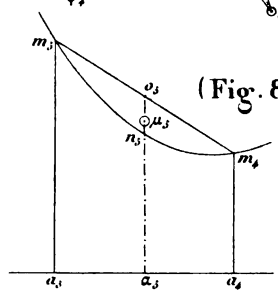
d'eau. C'est encore pour faciliter ce nettoiement qu'on a supprimé tout exhaussement du siége, et toute séparation entre les ouvertures indiquées dans le N°. 4 du *Mémorial*; elles ont d'ailleurs été reconnues inutiles par l'usage. Enfin le mur, placé derrière les ouvertures, est revêtu en dalles jusqu'à 1 mètre de hauteur, pour ne pas être constamment battu et déchaussé par l'eau qu'on y jette fréquemment.

Les ouvertures ont été réduites au minimum ; $0^m,20$ de longueur sur $0^m,08$ de largeur, afin de faciliter le tirage qui doit avoir lieu par elles. Aussi se fait-il très-bien ; ce dont on s'assure en y plaçant une lumière ou du papier allumé : on voit la flamme se précipiter rapidement vers l'intérieur de la fosse. Cette circonstance indique que la mauvaise odeur résultant des gaz délétères de la fosse, ne peut arriver à l'extérieur, par les ouvertures. Il n'y a donc à craindre que l'odeur des matières momentanément déposées sur le sol même des latrines ; or celle-ci est peu de chose, et peut être entièrement annihilée avec du soin et de la propreté.

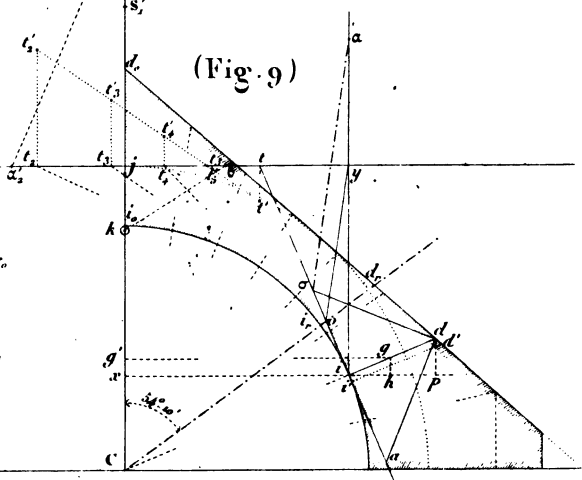
FIN.



(Fig. 6)

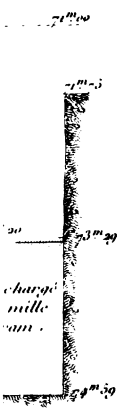


(Fig. 8)



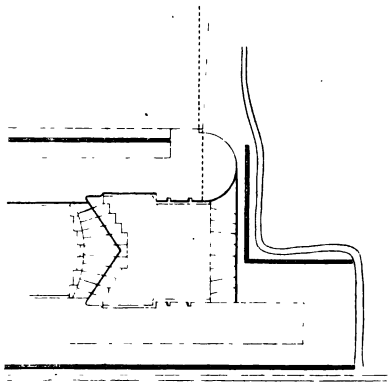
(Fig. 9)

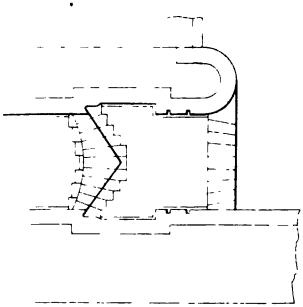
PL. IV.



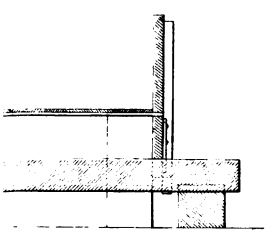
le séparation

nbre d'aval.





par l'axe du pivot.



Fourche. Lance.

Fig. 11.

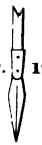


Fig. 12.

Crochet

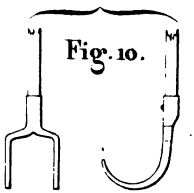
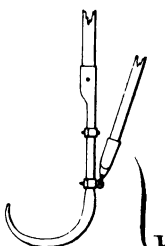


Fig. 10.



Charrue

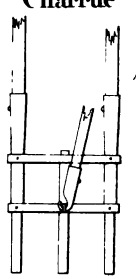


Fig. 9.

Coupe suivant C D.

Fig. 3.

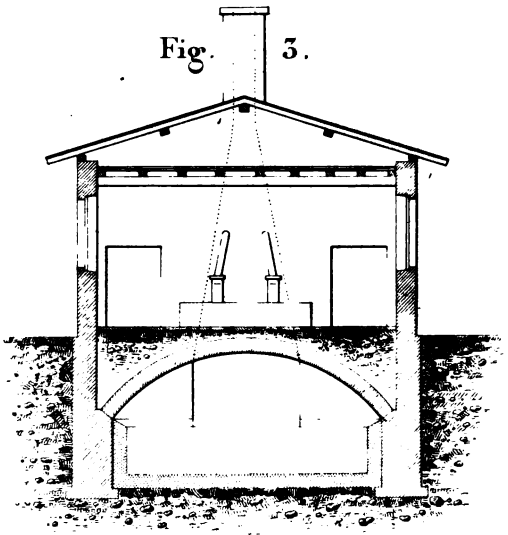
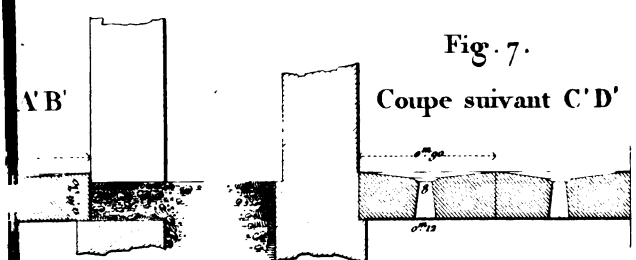


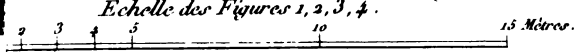
Fig. 7.

Coupe suivant C' D'

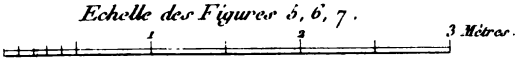
A' B'



Echelle des Figures 1, 2, 3, 4.



Echelle des Figures 5, 6, 7.



HDI
HW 2763 B

This book should be returned
the Library on or before the last d
stamped below.

A fine of five cents a day is incur
by retaining it beyond the speci
time.

Please return promptly.